PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio VIII X

Palchetto 13

Num.° d' ordine 24

NAZIONALE
B. Prov.
I
2003
NAPOLI
BIBLIOTECA
VITT. EM. III

Digitized by Google

830.1:E
I
2003

Digitized by Google

60986

NOUVELLES MÉTHODES

POUR LA DÉTERMINATION

DE L'ORBITE DES COMÈTES.

SECOND SUPPLÉMENT.

Dans le supplément qui précède, nous avons perfectionné et simplifié la méthode exposée dans notre premier Mémoire, de manière qu'elle devra donner dans tous les cas une approximation suffisante pour la pratique, surtout si on l'applique à des observations effectives et qui n'aient point été soumises à l'interpolation. Cette méthode serait susceptible d'un plus grand degré de précision, si on voulait admettre les quantités du quatrième ordre dans le développement des coordonnées, ce qui rendrait les équations (*e*) et (*g*), (pag. 5 et 6), exactes jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement; mais l'introduction de ces termes augmenterait beaucoup la longueur des calculs, et rendrait les formules moins élégantes.

Nous nous proposons maintenant d'exposer une seconde méthode par laquelle on peut assez facilement obtenir la solution la plus exacte dont le problème est susceptible, et qui a l'avantage de se rapprocher de plusieurs méthodes connues, telles que la méthode de M. Olbers et celle que M. Ivory a donnée dans les Transactions philosophiques de la Société royale de Londres an 1814, première partie.

Nous considérons d'abord le secteur décrit par le rayon vecteur de la comète, dans le temps écoulé de la première à la troi-

Digitized by Google

sième observation, et nous cherchons dans quel rapport la corde de ce secteur est divisée par le rayon vecteur qui répond à la seconde observation. On sait, d'après Newton, que ce rapport diffère en général très peu du rapport des temps écoulés dans les intervalles des observations, et les approximations données par MM. Olbers et Ivory supposent que la différence entre ces deux rapports peut toujours être négligée.

Mais cette supposition n'est pas suffisamment exacte dans plusieurs circonstances. Aussi la rectification successive de la valeur attribuée au rapport des deux parties de la corde, caractérise la différence essentielle entre la méthode nouvelle que nous proposons, et celles qu'ont données MM. Olbers et Ivory.

En général, nous distinguons, dans cette seconde méthode, trois degrés successifs d'approximation ; le premier, dans lequel on néglige les termes du second ordre en θ et θ', ne donne que des résultats peu exacts, mais qui suffisent pour diriger les hypothèses dans les calculs suivans.

Le second degré d'approximation, dans lequel on a égard aux quantités du second ordre, est à peu près le même que celui qu'on obtient par notre première méthode ; il revient encore à celui que donnent les méthodes de MM. Olbers et Ivory, dans tous les cas où l'on peut supposer sans erreur sensible que la corde est partagée en raison des temps.

Enfin le troisième degré d'approximation est celui où l'on tient compte des quantités du troisième ordre; il s'obtient très facilement au moyen de l'approximation précédente, et l'orbite qui en résulte satisfait en général aussi exactement qu'il est possible aux observations données.

Cette méthode cependant ne s'appliquerait plus avec le même succès, si l'orbite réelle s'écartait sensiblement de la figure parabolique ; c'est ce qu'on reconnaîtrait par les élémens trouvés de l'orbite parabolique, lesquels satisferaient toujours exactement aux deux observations extrêmes, mais ne représenteraient l'ob-

Digitized by Google

servation moyenne qu'avec des erreurs plus ou moins considérables. Dans ce cas, il faudrait avoir recours aux méthodes connues des astronomes pour la détermination des orbites elliptiques ou hyperboliques. D'ailleurs, si on n'a besoin que d'une première approximation, on pourra en trouver une par notre première méthode, en n'omettant aucune des équations du problème, et déterminant le demi-grand axe a par la dernière de ces équations, savoir $\frac{2}{r} - \frac{1}{a} = m'^2 + n'^2 + p'^2$.

Pour rendre ces recherches plus complètes, j'ai cru qu'il ne serait pas inutile d'exposer sommairement une troisième méthode, où l'on suppose connu, pour un instant donné, la longitude et la latitude apparentes de la comète, avec leurs coefficiens différentiels du premier et du second ordre, pris par rapport au tems. On a reproché à cette méthode, la longueur des calculs d'interpolation nécessaires pour déduire ces coefficiens d'un certain nombre d'observations données; nous avons fait remarquer de plus, page iv du premier Mémoire, que les résultats de l'interpolation peuvent devenir d'autant plus inexacts, qu'on combine ensemble un plus grand nombre d'observations. Quoi qu'il en soit, toutes les fois que les coefficiens différentiels pourront être déterminés avec une précision suffisante, cette méthode sera la plus simple et la plus exacte de toutes. C'est pourquoi nous la donnons ici avec des explications qui en faciliteront l'usage et la feront mieux apprécier.

Je n'ajouterai rien aux méthodes que j'ai déjà données dans les deux Mémoires précédens et surtout dans le second, pour trouver l'orbite corrigée qui satisfait, le plus exactement qu'il est possible, à un nombre quelconque d'observations, faites dans un espace de temps plus ou moins long. Il me semble que jusqu'à la publication de ces Mémoires, qui a eu lieu en 1805 et 1806, la question n'avait été traitée que d'une manière imparfaite et par de simples tâtonnemens. J'ai donné le premier deux méthodes

sûres pour obtenir la solution à la fois la plus simple et la plus exacte, savoir : la *méthode des corrections indéterminées* qui n'avait encore reçu qu'un petit nombre d'applications, et la *méthode des moindres carrés*, qui paraissait alors pour la première fois.

SECONDE MÉTHODE.

1. Soit S le centre du Soleil (fig. 1), Sγ l'axe des x dirigé vers le premier point d'*Aries;* T°, T, T′ les trois lieux de la Terre correspondans aux temps $j-\theta$, j, $j+\theta'$; soient C°, C, C′, les lieux observés de la comète dans les trois mêmes instans, et enfin Q°, Q, Q′, les projections de ces points sur le plan de l'écliptique. Nous appellerons :

A°, A, A′, les trois longitudes héliocentriques de la Terre ;
R°, R, R′, les trois rayons vecteurs ST°, ST, ST′ ;
a°, a, a', les trois longitudes géocentriques de la comète ;
r°, r, r', les trois rayons vecteurs SC°, SC, SC′ ;
b°, b, b', les trois latitudes géocentriques de la comète ;
σ°, σ, σ', les trois distances accourcies TQ°, TQ, TQ′ ;
c, la corde C°C de l'arc parcouru pendant le temps $\theta+\theta'$.

Le plan de l'orbite passant toujours par le Soleil, le rayon vecteur CS coupera la corde C°C′ en un point D qui aura pour projection le point E.

On sait que le rapport des deux parties de la corde C°D, DC′, est à très peu près égal à celui des temps θ, θ' ; nous supposerons que ce rapport est exactement celui de λ à λ', et nous prendrons $\lambda+\lambda'=1$, ce qui donnera C°D$=\lambda c$ et C′D$=\lambda' c$.

Enfin nous supposerons CD$=er$, ou SD$=(1-e)r$, e devant être une quantité très petite du second ordre, par rapport à θ et θ' qui sont censés du premier ordre.

2. Pour trouver le rapport de λ à λ', qui sera le fondement de notre analyse, nous supposerons d'abord l'orbite parabolique.

Soit la distance périhélie SP$=\Pi$ (fig. 2), l'anomalie au point C ou l'angle PSC$=\psi$, l'angle C°SC$=\theta$, l'angle CSC′$=\theta'$; soit de plus $\tang\frac{1}{2}\psi=u$, $\tang\frac{1}{2}\theta=\gamma$, $\tang\frac{1}{2}\theta'=\gamma'$; on aura par les propriétés de la parabole,

$$r=\Pi(1+u^2),\quad u^\circ=\tang(\tfrac{1}{2}\psi-\tfrac{1}{2}\theta)=\frac{u-\gamma}{1+\gamma u},\quad r^\circ=\frac{r(1+\gamma^2)}{(1+\gamma u)^2},$$

$$r^\circ=\Pi(1+u^{\circ 2}),\quad u'=\tang(\tfrac{1}{2}\psi+\tfrac{1}{2}\theta')=\frac{u+\gamma'}{1-\gamma' u},\quad r'=\frac{r(1+\gamma'^2)}{(1-\gamma' u)^2},$$

$$r'=\Pi(1+u'^2).$$

Dans les triangles C°DS, C′DS, on a

$$C^\circ D=\frac{r^\circ\sin\theta}{\sin D},\quad C'D=\frac{r'\sin\theta'}{\sin D};$$

donc

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{r^\circ\sin\theta}{r'\sin\theta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}\cdot\frac{(1-\gamma' u)^2}{(1+\gamma u)^2}.$$

Dans l'orbite elliptique, on a le quarré de la vitesse..... $\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{2}{r}-\frac{1}{a}$; dans l'orbite parabolique où a est infini, on a simplement $\frac{ds^2}{dt^2}$, ou $\frac{dr^2+r^2d\psi^2}{dt^2}=\frac{2}{r}$. Substituant les valeurs... $d\psi=\frac{2du}{1+u^2}$, $dr=2\Pi u du$, on aura $dr^2+r^2d\psi^2=4\Pi^2(1+u^2)du^2$ $=\frac{2}{r}dt^2$. De là résulte $\frac{dt}{\sqrt{(2\Pi^3)}}=du(1+u^2)$, et en intégrant à compter du périhélie,

$$\frac{t}{\sqrt{(2\Pi^3)}}=u+\tfrac{1}{3}u^3;$$

mettant $t+\theta'$ au lieu de t et u' au lieu de u, on aura

$$\frac{t'}{\sqrt{(2\Pi^3)}}=u'-u+\tfrac{1}{3}(u'^3-u^3),$$

ou en substituant la valeur de u',

$$\frac{t'}{\sqrt{(2\Pi^3)}}=\frac{\gamma'(1+u^2)^2}{(1-\gamma' u)^2}\left(1+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\gamma'^2(1+u^2)}{1-\gamma' u}\right).$$

Cette équation est relative au point C′; on aurait semblablement

pour le point C°

$$\frac{\theta}{\sqrt{(2\Pi^3)}} = \frac{\gamma(1+u^2)^2}{(1+\gamma u)^2}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{\gamma^2(1+u^2)}{1+\gamma u}\right).$$

Soit pour un moment $Z = \frac{1+u^2}{1+\gamma u}$, $Z' = \frac{1+u^2}{1-\gamma' u}$; on aura les deux équations

$$\frac{\theta'}{\sqrt{(2\Pi^3)}} = \gamma' Z'^2 + \frac{1}{3}\gamma'^3 Z'^3,$$

$$\frac{\theta}{\sqrt{(2\Pi^3)}} = \gamma Z^2 + \frac{1}{3}\gamma^3 Z^3.$$

De là on déduit, en rejetant seulement les quantités du cinquième ordre,

$$\gamma' = \frac{\theta'}{Z'^2\sqrt{(2\Pi^3)}}\left(1-\frac{\theta'^2}{6\Pi^3 Z'^3}\right),$$

$$\gamma = \frac{\theta}{Z^2\sqrt{(2\Pi^3)}}\left(1-\frac{\theta^2}{6\Pi^3 Z^3}\right),$$

et parce qu'on a déjà trouvé $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\gamma Z^2}{\gamma' Z'^2}$, il en résulte le rapport cherché

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\theta}{\theta'}\left(1-\frac{\theta^2}{6\Pi^3 Z^3}+\frac{\theta'^2}{6\Pi^3 Z'^3}\right).$$

Observons de plus que des valeurs précédentes, on déduit

$$r + r^0 = 2\Pi Z + \Pi\gamma^2 Z^2,$$
$$r' + r = 2\Pi Z' + \Pi\gamma'^2 Z'^2;$$

donc dans les termes $\frac{\theta^2}{6\Pi^3 Z^3}$, $\frac{\theta'^2}{6\Pi^3 Z'^3}$, on peut substituer les valeurs suffisamment approchées $\Pi Z = \frac{1}{2}(r+r^0)$, $\Pi Z' = \frac{1}{2}(r+r')$, ou simplement $\Pi Z = v$, $\Pi Z' = v'$, en appelant v et v' les rayons vecteurs moyens $\frac{1}{2}(r+r^0)$ et $\frac{1}{2}(r'+r)$, des arcs C°C et CC′ parcourus dans les tems θ et θ', on aura donc enfin

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\theta}{\theta'}\left(1-\frac{\theta^2}{6v^3}+\frac{\theta'^2}{6v'^3}\right),$$

rapport qui doit être exact aux quantités près du quatrième ordre;

Digitized by Google

et parce qu'on a supposé $\lambda+\lambda'=1$, il en résulte

$$\lambda=\frac{\theta}{\theta+\theta'}\left[1-\frac{\theta'}{\theta+\theta'}\left(\frac{\theta^2}{6v^3}-\frac{\theta'^2}{6v'^3}\right)\right],$$
$$\lambda'=\frac{\theta'}{\theta+\theta'}\left[1+\frac{\theta}{\theta+\theta'}\left(\frac{\theta^2}{6v^3}-\frac{\theta'^2}{6v'^3}\right)\right].$$

3. Pour avoir maintenant la valeur de e qui fait connaître celle de $SD=r(1-e)$, j'observe que les triangles $C^\circ SD$, $SC^\circ C'$, donnent $SD=\lambda k.\frac{\sin C^\circ}{\sin\zeta}$, $\sin C^\circ=\frac{r'}{k}\sin(\zeta+\zeta')$; donc,..... $SD=\lambda r'.\frac{\sin(\zeta+\zeta')}{\sin\zeta}$. Mais on a $\frac{\sin(\zeta+\zeta')}{\sin\zeta}=\frac{(\gamma+\gamma')(1-\gamma\gamma')}{\gamma(1+\gamma'^2)}$, $\lambda r'=\frac{\gamma r(1+\gamma'^2)}{(\gamma+\gamma')(1+\gamma\gamma'u^2)}$; donc $SD=\frac{r(1-\gamma\gamma')}{1+\gamma\gamma'u^2}=r(1-e)$, et par conséquent

$$e=\frac{\gamma\gamma'(1+u^2)}{1+\gamma\gamma'u^2}.$$

Si l'on néglige les quantités du quatrième ordre, on aura simplement $e=\gamma\gamma'(1+u^2)$, ou en substituant la valeur de $\gamma\gamma'$, $e=\frac{\theta\theta'(1+u^2)}{2\Pi^2Z^2Z'^2}=\frac{r^2\theta\theta'}{2\Pi^2Z^2Z'^2}$. Dans cette formule, où l'on doit rejeter les quantités du quatrième ordre, il suffira de faire $\Pi Z=\frac{1}{2}(r+r^\circ)$, ou même $\Pi Z=\sqrt{(rr^\circ)}$, car la différence $r+r^\circ-2\sqrt{(rr^\circ)}$ est une quantité du second ordre; on fera semblablement $\Pi Z'=\sqrt{(rr')}$, et on aura enfin sous une forme très simple

$$e=\frac{\theta\theta'}{2r^2rr'},$$

résultat qui doit être exact aux quantités du quatrième ordre près.

4. Les formules précédentes offrent un moyen facile de démontrer le théorème de Lambert, dont nous ferons usage dans cette nouvelle solution. Considérons, pour cet effet, le secteur $C^\circ SC$ décrit dans le tems θ; soit la corde $CC^\circ=c^\circ$, puis $r+r^\circ+c^\circ=2p$, $r+r^\circ-c^\circ=2q$, ce qui donne $r+r^\circ=p+q$,

Digitized by Google

$c^2 = p - q$. Par le triangle SCS', on a $c'^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cdot\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}$ $= (r'+r)^2 - \frac{4r^2}{(1+\gamma u)^2}$; donc $\frac{r^2}{(1+\gamma u)^2} = pq$, ou $\sqrt{(pq)} = \frac{r}{1+\gamma u}$ $= \Pi\cdot\frac{1+u^2}{1+\gamma u} = \Pi Z$; donc $Z = \frac{\sqrt{(pq)}}{\Pi}$.

D'un autre côté, on a $r' = \frac{r(1+\gamma^2)}{(1+\gamma u)^2}$, $r + r'$ ou $p + q = \frac{2r}{1+\gamma u}$ $+ \frac{\Pi\gamma^2(1+u^2)^2}{(1+\gamma u)^2}$; donc $p + q = 2\sqrt{(pq)} + \Pi\gamma^2 Z^2$, ce qui donne $\gamma Z = \frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{\Pi}}$; substituant cette valeur, ainsi que celle de Z, dans l'équation du tems $\frac{\theta}{\sqrt{(2\Pi^3)}} = \gamma Z^3 + \frac{1}{5}\gamma^3 Z^5$, on en tire

$$\theta = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3}(p^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{6}(r'+r+c')^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(r'+r-c')^{\frac{3}{2}};$$

c'est le théorème de Lambert qui donne l'expression du temps par la somme des deux rayons vecteurs et la corde de l'arc décrit.

5. Ces différens résultats supposent que l'orbite est parabolique; cherchons maintenant les valeurs des quantités λ, λ', e, lorsque l'orbite est elliptique; ces valeurs deviendront applicables au secteur décrit par la Terre dans le temps $\theta + \theta'$; et en supposant le grand axe infini, elles devront coïncider avec les résultats précédens.

Désignons par x, y, z, r, les coordonnées et la distance du point C, rapportées au centre des forces S, pour une époque déterminée $t = j$; désignons semblablement par x', y', z', r', celles du point C' pour une époque peu différente $t = j + \theta'$, et par x°, y°, z°, r°, celles du point C°, pour l'époque $t = j - \theta$. Il s'agit de développer ces dernières quantités, suivant les puissances de θ' et θ, en supposant que les intervalles de temps θ' et θ, mesurés par les arcs correspondans du moyen mouvement de la Terre, sont assez petits pour qu'on puisse négliger les termes du cinquième ordre et au-dessus.

Ce développement se fera, comme dans l'art. 3 du premier

Digitized by Google

Mémoire, d'après les équations différentielles du mouvement; il en résulte, pour les coordonnées x' et x°, des expressions de cette forme

$$x' = xf(\theta') + \frac{dx}{dt}\varphi(\theta'),$$
$$x^\circ = xf(-\theta) + \frac{dx}{dt}\varphi(-\theta),$$

dans lesquelles les fonctions f et φ se développent jusqu'à la quatrième puissance de τ inclusivement, comme il suit :

$$f(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{2r^3} + \frac{k\tau^3}{2r^4} - \tau^4\left(\frac{5k^2}{8r^7} - \frac{1}{6r^6} + \frac{1}{8ar^5}\right),$$
$$\varphi(\tau) = \tau - \frac{\tau^3}{6r^3} + \frac{k\tau^4}{4r^5}.$$

Les coefficiens de ces fonctions dépendent, comme on voit, du rayon vecteur r, de la quantité $k = \frac{rdr}{dt}$, relatifs l'un et l'autre à l'époque $t=j$, et du demi-grand axe a de l'orbite supposée elliptique, lequel devient négatif dans le cas de l'orbite hyperbolique, et infini dans celui d'une orbite parabolique.

6. Les mêmes formules s'appliquant semblablement aux deux autres coordonnées, on déterminera, d'après les intervalles de temps θ' et θ, la position des points C' et C°, comme il suit :

$$x^\circ = xf(-\theta) + \frac{dx}{dt}\varphi(-\theta), \quad x' = xf(\theta') + \frac{dx}{dt}\varphi(\theta'),$$
$$y^\circ = yf(-\theta) + \frac{dy}{dt}\varphi(-\theta), \quad y' = yf(\theta') + \frac{dy}{dt}\varphi(\theta'),$$
$$z^\circ = zf(-\theta) + \frac{dz}{dt}\varphi(-\theta), \quad z' = zf(\theta') + \frac{dz}{dt}\varphi(\theta').$$

Si l'on élimine de ces équations les coefficiens différentiels $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on en déduira les trois suivantes :

$$x^\circ\varphi(\theta') - x'\varphi(-\theta) = xw,$$
$$y^\circ\varphi(\theta') - y'\varphi(-\theta) = yw,$$
$$z^\circ\varphi(\theta') - z'\varphi(-\theta) = zw,$$

où l'on a fait $w = f(-\theta)\varphi(\theta') - f(\theta')\varphi(-\theta)$, c'est-à-dire en développant jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement,

$$w = \theta + \theta' - \frac{(\theta+\theta')^3}{6r^3} + \frac{k}{4r^3}(\theta+\theta')^3(\theta'-\theta).$$

On pourrait, des trois équations précédentes, éliminer entièrement $\varphi(\theta')$, $\varphi(-\theta)$, et w, ce qui donnerait

$$x(y^\circ z' - y'z^\circ) + y(z^\circ x' - z'x^\circ) + z(x^\circ y' - x'y^\circ) = 0 ;$$

c'est la condition qui exprime que les trois points C°, C, C′, sont situés dans un même plan avec le point S, origine des coordonnées.

7. Maintenant, de ce que les deux parties C°D, DC′, de la corde C°C′, sont entre elles comme λ est à λ', il suit que leurs projections Q°E, EQ′, sur le plan de l'écliptique, sont également entre elles $:: \lambda : \lambda'$; et comme les coordonnées des points Q°, E, Q′, dans le sens des x, sont x°, $(1-e)x$, x', on aura

$$\lambda[x' - (1-e)x] = \lambda'[(1-e)x - x^\circ],$$

ou

$$\lambda x' + \lambda' x^\circ = (1-e)x ;$$

donc

$$[\lambda' f(-\theta) + \lambda f(\theta')]x + [\lambda'\varphi(-\theta) + \lambda\varphi(\theta')]\frac{dx}{dt} = (1-e)x ;$$

on aurait semblablement, dans le sens des y, l'équation

$$[\lambda' f(-\theta) + \lambda f(\theta')]y + [\lambda'\varphi(-\theta) + \lambda\varphi(\theta')]\frac{dy}{dt} = (1-e)y.$$

Ces deux équations, où les quantités $\frac{dx}{xdt}$, $\frac{dy}{ydt}$, sont indépendantes de θ et θ', ne peuvent subsister à moins qu'on n'ait

$$1 - e = \lambda' f(-\theta) + \lambda f(\theta'),$$
$$0 = \lambda'\varphi(-\theta) + \lambda\varphi(\theta').$$

La dernière fait connaître le rapport de λ à λ', lequel est

Digitized by Google

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{-\varphi(-\theta)}{\varphi(\theta')} = \frac{\theta}{\theta'} \cdot \frac{1 - \frac{\theta^2}{6r^3} - \frac{k\theta^3}{4r^5}}{1 - \frac{\theta'^2}{6r^3} + \frac{k\theta'^3}{4r^5}};$$

et puisqu'on a $k = \frac{rdr}{dt}$, et $r^0 = r - \theta\frac{dr}{dt} = r - \frac{k\theta}{r}$, il s'ensuit que si l'on néglige les quantités du quatrième ordre seulement, on pourra faire $1 - \frac{\theta^2}{6r^3} - \frac{k\theta^3}{4r^5} = 1 - \frac{\theta^2}{6(r^0 r)^{\frac{3}{2}}}$; on aura de même $1 - \frac{\theta'^2}{6r^3} + \frac{k\theta'^3}{4r^5} = 1 - \frac{\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}}$; donc la valeur de $\frac{\lambda}{\lambda'}$ se réduit à cette forme très simple

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\theta}{\theta'} \cdot \frac{1 - \frac{\theta^2}{6(r^0 r)^{\frac{3}{2}}}}{1 - \frac{\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}}};$$

et puisque $\lambda + \lambda' = 1$, on en déduit

$$\lambda = \frac{\theta}{\theta + \theta'} + \frac{\theta\theta'}{(\theta + \theta')^2}\left(\frac{\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}} - \frac{\theta^2}{6(r^0 r)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\lambda' = \frac{\theta'}{\theta + \theta'} - \frac{\theta\theta'}{(\theta + \theta')^2}\left(\frac{\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}} - \frac{\theta^2}{6(r^0 r)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

8. Substituant ces valeurs ainsi que celles de $f(\theta')$ et de $f(-\theta)$, dans l'équation $1 - e = \lambda' f(-\theta) + \lambda f(\theta')$, on aura, en négligeant toujours les quantités du quatrième ordre,

$$e = \frac{\theta\theta'}{2r^3} - \frac{k\theta\theta'(\theta' - \theta)}{2r^5} = \frac{\theta\theta'}{2r^0 rr'}.$$

Ainsi on voit que les valeurs de λ, λ', e, qui ont lieu dans l'hypothèse d'une orbite elliptique ou hyperbolique, s'accordent avec celles que nous avons trouvées directement pour l'orbite parabolique, attendu que le demi-grand axe a n'entre point dans leur expression, au moins lorsque l'approximation n'est poussée dans ces valeurs que jusqu'aux quantités du troisième ordre in-

Digitized by Google

clusivement. Pour avoir un degré d'approximation de plus, il faudrait que le développement des fonctions $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$, fût continué jusqu'aux termes du cinquième ordre, ce qui, au reste, est superflu pour la solution de notre problème.

9. Dans les applications ordinaires, on pourra se borner aux termes du second ordre, ce qui donnera

$$\lambda = \frac{\theta}{\theta+\theta'} + \frac{\theta\theta'}{\theta+\theta'}\left(\frac{\theta'-\theta}{6r^3}\right), \quad e = \frac{\theta\theta'}{2r^3},$$
$$\lambda' = \frac{\theta'}{\theta+\theta'} - \frac{\theta\theta'}{\theta+\theta'}\cdot\left(\frac{\theta'-\theta}{6r^3}\right);$$

mais nous ferons remarquer que la quantité $\frac{\theta^2}{6(rr^0)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}}$ ayant été mise dans les valeurs de λ et λ' pour

$$\frac{\theta'^2-\theta^2}{6r^3} - \frac{k(\theta'^3+\theta^3)}{4r^5},$$

on ne peut la réduire au premier terme $\frac{\theta'^2-\theta^2}{6r^3}$, qu'en commettant une erreur qui sera quelquefois aussi grande ou même plus grande que le terme conservé.

Le même inconvénient n'a pas lieu sur la valeur de e; car la quantité $\frac{\theta\theta'}{2r^2rr'}$ étant mise pour $\frac{\theta\theta'}{2r^5} - \frac{k\theta\theta'(\theta'-\theta)}{2r^5}$, le second terme sera toujours beaucoup plus petit que le premier.

Il est inutile d'ajouter que dans les premières approximations on pourra, en négligeant les quantités de second ordre, faire simplement

$$\lambda = \frac{\theta}{\theta+\theta'}, \quad \lambda' = \frac{\theta'}{\theta+\theta'}, \quad e = 0.$$

10. Venons maintenant aux équations nécessaires pour la solution du problème. La relation entre les coordonnées des points C°, C, C', fournit, ainsi qu'on l'a déjà vu, les trois équations

$$(1)\quad \begin{aligned} \lambda x' + \lambda' x^0 - (1-e)x &= 0, \\ \lambda y' + \lambda' y^0 - (1-e)y &= 0, \\ \lambda z' + \lambda' z^0 - (1-e)z &= 0. \end{aligned}$$

Mais, par les données de l'observation, on a, pour le point C,

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= \sigma\cos a + \mathrm{R}\cos \mathrm{A} = \sigma\cos a + \mathrm{X},\\ y &= \sigma\sin a + \mathrm{R}\sin \mathrm{A} = \sigma\sin a + \mathrm{Y},\\ z &= \sigma\,\mathrm{tang}\, b; \end{aligned}$$

et comme les points C°, C′, fournissent de semblables valeurs, on en déduira les trois équations

$$\begin{aligned} &\lambda\sigma'\cos a' + \lambda'\sigma^{\circ}\cos a^{\circ} - (1-e)\,\sigma\cos a + \varpi\cos \mathrm{A}_1 = 0,\\ &\lambda\sigma'\sin a' + \lambda'\sigma^{\circ}\sin a^{\circ} - (1-e)\,\sigma\sin a + \varpi\sin \mathrm{A}_1 = 0,\\ &\lambda\sigma'\,\mathrm{tang}\, b' + \lambda'\sigma^{\circ}\,\mathrm{tang}\, b^{\circ} - (1-e)\,\sigma\,\mathrm{tang}\, b = 0, \end{aligned}$$

où l'on a fait pour abréger

$$\begin{aligned} \lambda\mathrm{X}' + \lambda'\mathrm{X}^{\circ} - (1-e)\mathrm{X} &= \varpi\cos \mathrm{A}_1,\\ \lambda\mathrm{Y}' + \lambda'\mathrm{Y}^{\circ} - (1-e)\mathrm{Y} &= \varpi\sin \mathrm{A}_1. \end{aligned}$$

Ces deux dernières quantités étant relatives au mouvement de la Terre, on pourra les réduire à une forme plus simple, au moyen de l'analyse précédente; car, en conservant l'analogie des dénominations, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^{\circ} &= \mathrm{X}\mathrm{F}(-\theta) + \frac{d\mathrm{X}}{dt}\,\Phi(-\theta),\\ \mathrm{X}' &= \mathrm{X}\mathrm{F}(\theta') + \frac{d\mathrm{X}}{dt}\,\Phi(\theta'),\\ \mathrm{F}(-\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2\mathrm{R}^3} - \frac{\mathrm{K}\theta^3}{2\mathrm{R}^3},\quad \Phi(-\theta) = -\theta + \frac{\theta^3}{6\mathrm{R}^3} + \frac{\mathrm{K}\theta^4}{4\mathrm{R}^5},\\ \mathrm{F}(\theta') &= 1 - \frac{\theta'^2}{2\mathrm{R}^3} + \frac{\mathrm{K}\theta'^3}{2\mathrm{R}^5},\quad \Phi(\theta') = \theta' - \frac{\theta'^3}{6\mathrm{R}^3} + \frac{\mathrm{K}\theta'^4}{4\mathrm{R}^5}; \end{aligned}$$

de là résulte, en ne négligeant que les quantités du quatrième ordre, $\lambda\mathrm{X}' + \lambda'\mathrm{X}^{\circ} - (1-e)\mathrm{X}$, ou

$$\varpi\mathrm{A}_1 = \mathrm{X}\left(e - \frac{\theta\theta'}{2\mathrm{R}^3} + \frac{\mathrm{K}\theta\theta'(\theta'-\theta)}{2\mathrm{R}^5}\right) + \frac{d\mathrm{X}}{dt}\cdot\frac{\theta\theta'}{6}(\theta'-\theta)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\mathrm{R}^3}\right).$$

Soit encore par analogie

$$\mathrm{E} = \frac{\theta\theta'}{2\mathrm{R}^3} - \frac{\mathrm{K}\theta\theta'}{2\mathrm{R}^5}(\theta'-\theta) = \frac{\theta\theta'}{2\mathrm{R}^{\circ}\mathrm{R}\mathrm{R}'};$$

Digitized by Google

on aura

$$\lambda X' + \lambda' X^\circ - (1 - e)X = (e - E)\left(X + \frac{\theta' - \theta}{3} \cdot \frac{dX}{dt}\right);$$

enfin, si on appelle X_1 ou $R_1 \cos A_1$, la valeur de X correspondante au temps $j + \frac{1}{3}(\theta' - \theta)$, qui tient le milieu entre les temps des trois observations $j - \theta$, j, $j + \theta'$, on aura pour dernière réduction

$$\lambda X' + \lambda' X^\circ - (1 - e)X = (e - E)X_1 = (e - E)R_1 \cos A_1.$$

On trouverait semblablement

$$\lambda Y' + \lambda' Y^\circ - (1 - e)Y = (e - E)Y_1 = (e - E)R_1 \sin A_1;$$

nos trois équations se réduisent donc aux trois suivantes

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = \lambda\sigma' \cos a' + \lambda'\sigma^\circ \cos a^\circ - (1 - e)\sigma \cos a + (e - E)R_1 \cos A_1, \\ 0 = \lambda\sigma' \sin a' + \lambda'\sigma^\circ \sin a^\circ - (1 - e)\sigma \sin a + (e - E)R_1 \sin A_1, \\ 0 = \lambda\sigma' \operatorname{tang} b' + \lambda'\sigma^\circ \operatorname{tang} b^\circ - (1 - e)\sigma \operatorname{tang} b. \end{cases}$$

C'est de ces équations que dépend principalement la solution du problème ; mais elles demandent à être employées avec quelques précautions, pour qu'on puisse en tirer des conclusions certaines; il est donc nécessaire de faire, sur ces équations, plusieurs observations préliminaires qui serviront à diriger les calculs.

11. La première observation que présentent les équations (3), c'est que deux des inconnues σ°, σ, σ', ne peuvent pas en être éliminées à la fois.

En effet, si on élimine σ° et σ' de ces trois équations, on en déduit

$$(4)\quad \sigma = \frac{e - E}{1 - e} R_1 \cdot \frac{\sin(A_1 - a^\circ)\operatorname{tang} b' - \sin(A_1 - a')\operatorname{tang} b^\circ}{\sin(a - a^\circ)\operatorname{tang} b' + \sin(a' - a)\operatorname{tang} b^\circ + \sin(a^\circ - a')\operatorname{tang} b};$$

or, quand même on connaîtrait d'avance la valeur de e, qui suppose r connu, on ne peut pas regarder comme suffisamment

Digitized by Google

approchée la valeur de σ donnée par cette formule, attendu que le dénominateur est, comme nous l'avons déjà fait voir, une quantité du troisième ordre, susceptible d'être considérablement affectée de l'erreur des observations.

Nous donnerons, par cette raison, le nom d'*équation douteuse* à l'équation (4), et nous nous abstiendrons en général d'en faire usage, pour déterminer la valeur de σ. Le même nom conviendrait aux deux équations semblables qui serviraient à déterminer σ° et σ'.

Comme la supposition de l'orbite parabolique donne une équation de plus que d'inconnues, on pourra toujours parvenir à la solution, sans employer l'équation douteuse. Il y a néanmoins quelques conséquences à en tirer.

12. Si le dénominateur de la formule (4) est nul, c'est-à-dire, si l'on a

$$D = \sin(a - a^{\circ})\operatorname{tang} b' + \sin(a' - a)\operatorname{tang} b^{\circ} + \sin(a^{\circ} - a')\operatorname{tang} b = 0,$$

auquel cas les trois lieux apparens de la comète sont situés dans un même grand cercle, il faudra que le numérateur de cette formule se réduise aussi à zéro, ce qui peut avoir lieu dans deux ans.

1°. Si l'on a

$$P = \sin(A1 - a^{\circ})\operatorname{tang} b' - \sin(A1 - a')\operatorname{tang} b^{\circ} = 0,$$

c'est-à-dire si le lieu du Soleil au temps $j + \frac{1}{3}(\theta' - \theta)$, moyen entre les temps des trois observations, est situé dans le même grand cercle que les trois lieux apparens de la comète, alors la valeur de σ devient $\frac{0}{0}$, et il n'y a rien à en conclure.

2°. Si la quantité P n'est pas zéro, ou si le lieu du Soleil n'est pas dans le grand cercle qui passe par les trois lieux apparens de la comète, mais qu'il soit très près de l'une des intersections de ce cercle avec l'écliptique, il n'y aura encore rien à conclure de l'équation (4).

Digitized by Google

Mais si la quantité P, qui est généralement du premier ordre, est assez grande pour que son signe ne puisse pas être changé par les erreurs des observations, alors il faudra qu'on ait à très peu près $e - E = 0$, ou $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}$, ce qui apprend que la comète et la Terre sont également éloignées du Soleil au temps de l'observation moyenne.

Cette circonstance facilitera les premiers calculs d'approximation; car, sachant qu'on a à très peu près $r = R$, on devra avoir aussi à peu près

$$\sigma = 2R \cos^2 b \cos (180^\circ + A - a),$$

$180^\circ + A$ étant la longitude du Soleil à l'instant de la seconde observation.

Telle est donc la conséquence qu'on pourra tirer de l'équation douteuse, lorsque la quantité D étant nulle ou très petite, la quantité P est en même temps assez grande pour que son signe ne puisse pas être changé par les erreurs des observations.

12. En général, lorsque les quantités D et P sont assez grandes l'une et l'autre pour que leurs signes soient bien déterminés, ce qui est la circonstance la plus favorable à l'exactitude de l'équation douteuse, on conclura de cette équation que le signe de $\frac{P}{D}$ est le même que celui de $e - E$, ou de $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}$; on saura par conséquent si r est plus grand ou plus petit que R.

Il pourra même se présenter des cas où l'exactitude de l'équation douteuse sera suffisante pour qu'en combinant cette équation avec celle que donne le triangle SCT, on en déduise des premières valeurs approchées de σ et r.

En effet, si l'on fait $\frac{D}{\frac{1}{2}\theta\theta' PR_1} = h$, l'équation (4) pourra être mise sous la forme

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} + h\sigma;$$

Digitized by Google

d'ailleurs le triangle SCT donne

$$r^2 = R^2 + 2R\sigma\cos(A - a) + \frac{\sigma^2}{\cos^2 b};$$

Ces deux équations sont satisfaites, lorsque $\sigma = 0$ et $r = R$; mais elles auront une autre solution, si $\cos(A-a) + \frac{1}{3}hR^4$ est une quantité négative, et cette solution s'obtiendra très aisément après quelques essais.

Le cas que nous venons d'indiquer ne pouvant être que fort rare, nous devons en faire abstraction, et regarder en général les équations (3) comme ne pouvant servir à éliminer à la fois deux des inconnues σ°, σ, σ'. Il reste donc à examiner seulement les combinaisons dans lesquelles il n'y a qu'une inconnue d'éliminée, et qui serviront par conséquent à déterminer deux des inconnues σ°, σ, σ', par la troisième à laquelle on donnera, dans les premiers essais, une valeur hypothétique. Ces combinaisons peuvent être présentées sous beaucoup de formes diverses; nous allons rapporter les principales, afin qu'on soit en état de choisir dans chaque cas particulier les formules les plus propres à donner des résultats exacts.

13. La première combinaison qui se présente est celle des deux équations suivantes:

$$\lambda\sigma'\sin(A1 - a') + \lambda'\sigma^\circ\sin(A1 - a^\circ) - (1-e)\sigma\sin(A1 - a) = 0,$$
$$\lambda\sigma'\operatorname{tang} b' + \lambda'\sigma^\circ\operatorname{tang} b^\circ - (1-e)\sigma\operatorname{tang} b = 0;$$

d'où résultent les formules

$$(5)\quad \sigma^\circ = \frac{(1-e)\sigma}{\lambda'}\cdot\frac{\operatorname{tang} b'\sin(A1-a) - \operatorname{tang} b\sin(A1-a')}{\operatorname{tang} b'\sin(A1-a^\circ) - \operatorname{tang} b^\circ\sin(A1-a')},$$
$$\sigma' = \frac{(1-e)\sigma}{\lambda}\cdot\frac{\operatorname{tang} b\sin(A1-a^\circ) - \operatorname{tang} b^\circ\sin(A1-a)}{\operatorname{tang} b'\sin(A1-a^\circ) - \operatorname{tang} b^\circ\sin(A1-a')}.$$

On pourra, dans les premiers essais, faire $\sigma = 0$, $\lambda = \frac{\theta}{\theta+\theta'}$, $\lambda' = \frac{\theta'}{\theta+\theta'}$, et alors ces formules donneront avec une exactitude

suffisante les rapports $\frac{\sigma^\circ}{\sigma}$, $\frac{\sigma'}{\sigma}$, pourvu que leur dénominateur déjà désigné par P, ne soit pas une quantité trop petite. Or nous savons que ce dénominateur est nul, lorsque les lieux apparens de la comète, dans la première et la troisième observation, sont situés dans un même grand cercle avec le lieu du Soleil à l'instant de l'observation moyenne, ou pour mieux dire, à l'instant qui tient le milieu entre les temps des trois observations.

Toutes les fois donc que cette coïncidence aura lieu ou exactement ou à fort peu près, il faudra recourir à d'autres formules, mais le plus grand nombre des cas pourra se résoudre par les formules précédentes dont nous avons indiqué l'usage pour la première approximation. Les approximations suivantes exigent qu'on substitue successivement des valeurs plus approchées de λ, λ', e, ainsi qu'il sera expliqué ci-après.

14. Une seconde combinaison qui produit un résultat très simple, consiste à n'employer que les deux premières des équations (3); on en tire les valeurs de σ° et σ', exprimées par le moyen de σ, comme il suit:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \sigma^\circ &= \frac{(1-e)\sigma\sin(a'-a)+(E-e)R_1\sin(a'-A_1)}{\lambda'\sin(a'-a^\circ)}, \\ \sigma' &= \frac{(1-e)\sigma\sin(a-a^\circ)+(e-E)R_1\sin(a^\circ-A_1)}{\lambda\sin(a'-a^\circ)}. \end{aligned}$$

Dans les premières approximations, on pourra supposer $E-e=0$, $1-e=1$, $\lambda=\frac{\theta}{\theta+\theta'}$, $\lambda'=\frac{\theta'}{\theta+\theta'}$, ce qui donnera simplement

$$\sigma^\circ=\frac{\theta+\theta'}{\theta'}\cdot\frac{\sigma\sin(a'-a)}{\sin(a'-a^\circ)},\quad \sigma'=\frac{\theta+\theta'}{\theta}\cdot\frac{\sigma\sin(a-a^\circ)}{\sin(a'-a^\circ)}.$$

Après les premiers essais, il faudra substituer les valeurs plus exactes de λ, λ', e, qui ont été données ci-dessus art. 9.

Les équations (6) s'appliqueront avec succès toutes les fois que le mouvement en longitude sera assez grand par lui-même et plus grand que le mouvement en latitude. Les équations (5)

Digitized by Google

seraient préférables, dans le cas contraire, sauf l'exception dont nous avons déjà parlé.

15. Pour donner un exemple de quelques autres combinaisons qui peuvent offrir des avantages particuliers, multiplions les équations (3) respectivement par $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $-\cot b^\circ\cos(\varphi-a^\circ)$, nous aurons, en ajoutant les produits, cette nouvelle formule

$$\lambda\sigma' = \frac{(1-e)\sigma[\cos(\varphi-a)-\operatorname{tang} b\cot b^\circ\cos(\varphi-a^\circ)]+(E-e)R_1\cos(\varphi-A_1)}{\cos(\varphi-a')-\operatorname{tang} b'\cot b^\circ\cos(\varphi-a^\circ)},$$

dans laquelle φ peut être pris à volonté.

Si l'on fait successivement $\varphi=0$, $\varphi=90^\circ$, on aura les deux formules qui suivent, pour déterminer σ' par le moyen de σ

$$(7)\quad \begin{cases} \sigma' = \dfrac{(1-e)\sigma(\cos a-\operatorname{tang} b\cot b^\circ\cos a^\circ)+(E-e)R_1\cos A_1}{\lambda(\cos a'-\operatorname{tang} b'\cot b^\circ\cos a^\circ)}, \\ \sigma' = \dfrac{(1-e)\sigma(\sin a-\operatorname{tang} b\cot b^\circ\sin a^\circ)+(E-e)R_1\sin A_1}{\lambda(\sin a'-\operatorname{tang} b'\cot b^\circ\sin a^\circ)}. \end{cases}$$

On choisira, pour chaque cas particulier, celle des deux formules qui aura le plus grand dénominateur.

Les formules, pour déterminer σ° par le moyen de σ, se déduiront des deux précédentes, par la simple permutation des signes $'$ et $^\circ$; on obtiendra ainsi les deux formules suivantes

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma^\circ = \dfrac{(1-e)\sigma(\cos a-\operatorname{tang} b\cot b'\cos a')+(E-e)R_1\cos A_1}{\lambda'(\cos a^\circ-\operatorname{tang} b^\circ\cot b'\cos a')}, \\ \sigma^\circ = \dfrac{(1-e)\sigma(\sin a-\operatorname{tang} b\cot b'\sin a')+(E-e)R_1\sin A_1}{\lambda'(\sin a^\circ-\operatorname{tang} b^\circ\cot b'\sin a')}. \end{cases}$$

Et on voit que ces formules ne sont guère plus composées que les formules (6).

16. Ayant montré l'usage qu'on doit faire des équations (3), suivant les différens cas, nous allons rassembler sous un même point de vue les diverses opérations nécessaires pour résoudre les équations du problème, et en déduire les élémens de l'orbite parabolique avec toute la précision que les observations comportent.

Digitized by Google

I. Les premières données du problème sont les trois longitudes de la comète a°, a, a', et ses trois latitudes b°, b, b', observées à des époques $j-\theta$, j, $j+\theta'$, dont les intervalles sont θ et θ'. Ces quantités θ et θ', données en jours moyens, devront être multipliées par le nombre qui a pour logarithme 8.2355821, afin d'être converties en arcs du mouvement moyen de la Terre, ces arcs ayant pour rayon l'unité.

Pour plus d'exactitude, nous supposons toujours que les lieux donnés de la comète, sont des lieux observés, et non des lieux déduits de l'interpolation. Il n'est pas nécessaire que les intervalles de temps θ et θ' soient égaux, mais il est bon qu'il n'y ait pas entre eux une trop grande inégalité, et que le plus grand des deux n'excède guère 10 jours, parce que la solution analytique est fondée sur ce que les quantités du quatrième ordre en θ et θ', peuvent être négligées.

On calculera par les tables astronomiques, ou bien on prendra dans les éphémérides les lieux du Soleil pour les instans des trois observations. Ces lieux augmentés de 180° donneront les longitudes de la Terre, A°, A, A'. On calculera de même les rayons vecteurs correspondans R°, R, R'; il faudra ensuite en déduire les valeurs de A et de R pour le temps $j+\frac{1}{3}(\theta'-\theta)$ qui tient le milieu entre les époques des trois observations. Ces valeurs, désignées ci-dessus par A_1 et R_1, se trouveront avec une exactitude suffisante pour l'usage qu'on en doit faire, par les formules $A_1=\frac{1}{3}(A^{\circ}+A+A')$, $\log R_1=\frac{1}{3}\log(R^{\circ}RR')$. On pourra cependant, dans le dernier calcul d'approximation, substituer aux quantités $(e-E)R_1\cos A_1$, et $(e-E)R_1\sin A_1$, les valeurs de $\varpi\cos A_1$ et $\varpi\sin A_1$, données dans l'art. 10, lesquelles sont indépendantes de toute supposition sur la figure de l'orbite terrestre. Mais cette correction qui ne laisse pas d'allonger le calcul, est en général de peu d'importance, parce qu'elle est de l'ordre des quantités qui ont été négligées.

Digitized by Google

II. D'après les données qui viennent d'être mentionnées, on pourra calculer les valeurs des quantités

$$P = \text{tang}\, b' \sin(A_1 - a^\circ) - \text{tang}\, b^\circ \sin(A_1 - a'),$$
$$D = \text{tang}\, b' \sin(a - a^\circ) + \text{tang}\, b^\circ \sin(a' - a) + \text{tang}\, b \sin(a^\circ - a');$$

si elles sont assez grandes l'une et l'autre pour que leurs signes ne puissent pas être changés par les erreurs des observations, on en conclura que $R - r$ est du même signe que DP; et si en même temps $\cos(180^\circ + A - a)$ est positif, on voit par l'équation

$$r^2 = R^2 + 2R\sigma \cos(A - a) + \frac{\sigma^2}{\cos^2 b},$$

que $2R\cos(180^\circ + A - a) - \sigma$ devra avoir le même signe que $R - r$, ce qui fournira une première donnée sur la valeur de σ.

Si D est très petit par rapport à P, on en conclura que les distances r et R sont à très peu près égales.

Si D et P sont très petits l'un et l'autre, il n'y a plus rien à conclure sur la grandeur relative de r et R, et on tombe alors dans les cas d'exception dont nous avons parlé.

III. Cela posé, on fera une première hypothèse sur la valeur de σ, soit arbitrairement, soit d'après les résultats du calcul précédent; ensuite on calculera les valeurs de σ° et σ', par les formules (5) ou par les formules (6), ou même par les formules (7) et (8), suivant les différens cas.

Dans les premiers essais, on pourra, en négligeant les quantités du second ordre, faire $e = 0$, $E = 0$, $\lambda = \frac{\theta}{\theta + \theta'}$, $\lambda' = \frac{\theta'}{\theta + \theta'}$, ce qui simplifiera d'autant les formules; on parviendra ainsi à des premières valeurs approchées de σ°, σ, σ'.

Cette première approximation étant obtenue, il faudra, pour aller plus loin, substituer les valeurs

$$E = \frac{\frac{1}{2}\theta\theta'}{R^2}, \qquad e = \frac{\frac{1}{2}\theta\theta'}{r^2},$$

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\theta}{\theta + \theta'}\left(1 + \frac{\theta'(\theta' - \theta)}{6r^2}\right), & \frac{1 - e}{\lambda} = \frac{\theta + \theta'}{\theta}\left(1 - \frac{\theta'(2\theta + \theta')}{6r^2}\right), \\ \lambda' = \frac{\theta'}{\theta + \theta'}\left(1 - \frac{\theta(\theta' - \theta)}{6r^2}\right), & \frac{1 - e}{\lambda'} = \frac{\theta + \theta'}{\theta'}\left(1 - \frac{\theta(2\theta' + \theta)}{6r^2}\right). \end{cases}$$

Digitized by Google

alors les formules qui expriment σ^0 et σ', contiendront à la fois σ et r, mais la marche du calcul n'en sera point arrêtée; car ayant fait une première hypothèse sur la valeur de σ, on en déduira immédiatement r par l'équation que donne le triangle SCT, savoir

$$r^2 = R^2 + 2R\sigma \cos (A - a) + \frac{\sigma^2}{\cos^2 b},$$

et substituant ces valeurs dans les expressions de σ^0 et σ', on connaitra ces deux quantités.

IV. On calculera ensuite les deux rayons vecteurs correspondans r^0 et r' par les formules

$$(10) \quad \begin{cases} r^{02} = R^{02} + 2R^0\sigma^0 \cos (A^0 - a^0) + \frac{\sigma^{02}}{\cos^2 b^0}, \\ r'^2 = R'^2 + 2R'\sigma' \cos (A' - a') + \frac{\sigma'^2}{\cos^2 b'}. \end{cases}$$

Quant à la corde c qui joint les points C^0, C', on pourrait la calculer par la formule

$$c^2 = \frac{r^{02}}{\lambda} + \frac{r'^2}{\lambda'} - \frac{(1-e)^2}{\lambda\lambda'} r^2;$$

mais, comme cette formule suppose qu'on connaît exactement les valeurs de λ, λ', e, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque l'approximation est déjà fort avancée, il conviendra de calculer c par une autre formule qui est plus composée, mais qui n'est sujette à aucun inconvénient.

Cette formule n'est autre chose que l'équation

$$c^2 = (x' - x^0)^2 + (y' - y^0)^2 + (z' - z^0)^2,$$

dans laquelle il faudra substituer les valeurs

$$x^0 = R^0 \cos A^0 + \sigma^0 \cos a^0, \quad y^0 = R^0 \sin A^0 + \sigma^0 \sin a^0, \quad z^0 = \sigma^0 \tang b^0,$$
$$x' = R' \cos A' + \sigma' \cos a', \quad y' = R' \sin A' + \sigma' \sin a', \quad z' = \sigma' \tang b',$$

ce qui donnera, en introduisant une auxiliaire V,

Digitized by Google

$$(11)\quad \begin{cases} c^2 = r^{02} + r'^2 - 2V, \\ V = R^0R'\cos(A' - A^0) + R'\sigma^0\cos(A' - a^0) + \sigma^0\sigma'\cos(a' - a^0) \\ \qquad\qquad + R^0\sigma'\cos(A^0 - a') + \sigma^0\sigma'\tang b^0\tang b'; \end{cases}$$

enfin pour vérifier toutes ces valeurs, on a l'équation des temps donnée par le théorème de Lambert, savoir:

$$(12)\quad 6(\theta + \theta') = (r^0 + r' + c)^{\frac{3}{2}} - (r^0 + r' - c)^{\frac{3}{2}};$$

c'est au moyen de cette dernière équation qu'on rectifiera successivement les différentes hypothèses faites sur la valeur de σ, et qu'on approchera de plus en plus de la vraie solution.

V. Lorsqu'on sera parvenu à une valeur de σ exacte dans les deux ou trois premières figures, on connaîtra en même temps, avec un semblable degré d'approximation, les valeurs des rayons vecteurs r^0, r, r'. On sera alors en état d'évaluer avec un degré d'exactitude suffisant pour la dernière approximation, les quantités e, λ, λ', ce qui se fera par les formules

$$c = \frac{\frac{1}{2}\theta\theta'}{r^0 r r'}, \quad \zeta = \frac{m\theta^2}{6(r^0 r)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}},$$

$$(13)\quad \log\lambda = \log\left(\frac{\theta}{\theta+\theta'}\right) - \frac{\theta'}{\theta+\theta'}\zeta,$$

$$\log\lambda' = \log\left(\frac{\theta}{\theta+\theta'}\right) + \frac{\theta}{\theta+\theta'}\zeta.$$

On connaît déjà la quantité $E = \frac{\frac{1}{2}\theta\theta'}{R^0RR'}$; ainsi en substituant ces données dans les équations du problème, on parviendra à satisfaire à ces équations aussi exactement que le comportent les observations soumises au calcul.

VI. Les équations étant ainsi résolues, il ne reste plus qu'à déterminer les élémens de l'orbite. C'est ce qu'on fera aussi simplement qu'il est possible par les formules suivantes.

Étant donnés les deux rayons vecteurs extrêmes r^0, r', et la corde c qui joint leurs extrémités, il faut d'abord trouver l'anomalie ψ^0 qui répond au premier rayon vecteur r^0 et la distance

Digitized by Google

périhélie Π; soit pour cet effet $s=\frac{1}{2}(r^\circ+r'+c)$, $u=\frac{1}{2}(r^\circ+r'-c)$, on aura les formules suivantes, où l'on suppose qu'à l'instant de la première observation, il reste à la comète l'anomalie ψ° à parcourir, pour arriver à son périhélie.

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi^\circ=\frac{s-r'}{c}\sqrt{\frac{s}{r^\circ}}-\frac{s-r^\circ}{c}\sqrt{\frac{u}{r^\circ}},$$

$$(14)\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi^\circ=\frac{r^\circ-\sqrt{(su)}}{\sqrt{(s-r^\circ)}\cdot\sqrt{(s-r')}},$$

$$\Pi=r^\circ\cos^2\tfrac{1}{2}\psi^\circ=\frac{(s-r^\circ)(s-r')}{(\sqrt{s}-\sqrt{u})^2};$$

il sera bon de calculer ψ° ainsi que Π, chacun par deux formules différentes, afin d'être sûr du résultat jusque dans la dernière décimale des logarithmes.

Connaissant Π et l'anomalie ψ°, on trouvera par la table des comètes le temps employé à parcourir l'anomalie ψ°; ce temps s'ajoutera à l'époque de la première observation, on s'en retranchera, selon que ψ° sera positif ou négatif, et l'on aura l'instant du passage au périhélie. Il sera même encore plus simple de calculer directement le temps par la formule.....

$t=(2\Pi^3)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}\psi)$, ayant soin d'ajouter au logarithme de chacune des parties le logarithme constant 1,7644179, qui est le complément de 8,2355821, afin que t soit exprimé en jours moyens.

Désignons par α° et $\mathcal{C}^\circ$ la longitude et la latitude héliocentrique du point C°, par α' et $\mathcal{C}'$ celles du point C'; on aura pour déterminer ces quantités les formules suivantes où tout est connu, puisque les distances accourcies σ° et σ' sont données par la résolution des équations du problème.

$$\sin\mathcal{C}^\circ=\frac{r^\circ}{r^\circ}\operatorname{tang}b^\circ,\quad \sin\mathcal{C}'=\frac{r'}{r'}\operatorname{tang}b',$$

$$(15)\qquad \sin(\alpha^\circ-A^\circ)=\frac{\operatorname{tang}\mathcal{C}^\circ}{\operatorname{tang}b^\circ}\sin(a^\circ-A^\circ),\quad \sin(\alpha'-A')=\frac{\operatorname{tang}\mathcal{C}'}{\operatorname{tang}b'}\sin(a'-A').$$

Digitized by Google

Le mouvement sera direct ou rétrograde, selon que $\alpha' - \alpha^\circ$, sera positif ou négatif.

Soit maintenant N la longitude du nœud ascendant, et I l'inclinaison de l'orbite, on aura la double équation,

$$(16) \quad \cot I = \cot \zeta^\circ \sin (\alpha^\circ - N) = \cot \zeta' \sin (\alpha' - N),$$

d'où résulte d'abord pour déterminer N la formule

$$(17) \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\alpha^\circ + \alpha'}{2} - N\right) = \frac{\sin(\zeta' + \zeta^\circ)}{\sin(\zeta' - \zeta^\circ)} \operatorname{tang} \frac{\alpha' - \alpha^\circ}{2}.$$

Dans l'usage de ces formules, les latitudes boréales sont toujours supposées positives et les latitudes australes négatives; on suppose aussi l'inclinaison I constamment moindre que 90°, de sorte que cot I doit toujours être positive. Il faudra donc que $\sin(\alpha^\circ - N)$ soit de même signe que la latitude ζ°; c'est ce qui fixera le choix entre les deux valeurs de N qui correspondent à une même valeur de $\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - N\right)$.

Enfin si l'on appelle H l'angle compris dans le plan de l'orbite, entre les deux rayons vecteurs menés au nœud et au point C°, on aura

$$(18) \quad \cos H = \cos \zeta^\circ \cos (\alpha^\circ - N);$$

et si à la longitude du nœud on ajoute la distance du périhélie au nœud $\downarrow^\circ + H$, on aura le lieu du périhélie sur l'orbite

$$= N + \downarrow^\circ + H.$$

Application de la seconde méthode à la première comète de 1805.

16. Nous choisirons dans le tableau de la pag. 14, premier supplément, les trois observations suivantes qui serviront à déterminer l'orbite.

Époques.	Longitudes.	Lat. bor.	Lieu du ⊙ − 180°.	Log R.
Octob. 22.68488	163° 20′ 53″	22° 59′ 53″	29° 19′ 50″	9.997421
30.68670	183.48.32	15.37.21	37.19.48	9.996496
34.72088	191.46.15	12. 2.29	41.22.26	9.996053

Dans cet exemple, on a $\theta = 8^j00182$, $\theta' = 4^j03418$,... $\theta + \theta' = 12^j03600$; ces nombres étant multipliés par un facteur dont le logarithme est 8.2355821, on a les résultats suivans, exprimés en logarithmes

θ...	9.1387708	θ'...	8.8413373
$\theta+\theta'$..	9.3160643	$\theta+\theta'$...	9.3160643
$\frac{\theta}{\theta+\theta'}$...	9.8227065	$\frac{\theta'}{\theta+\theta'}$...	9.5252730.

La seconde colonne du petit tableau qui précède, contient les valeurs des quantités a°, a, a'; la troisième, celles des quantités b°, b, b'; la quatrième, celles des quantités A°, A, A'; enfin la cinquième, celles des logarithmes des distances R°, R, R′. Si l'on prend le milieu entre les nombres de ces deux dernières colonnes, on aura, avec une exactitude suffisante, les valeurs des quantités que nous avons appelées A_1, R_1, savoir:

$$A_1 = 36^\circ\, 0'\, 41'',$$
$$\log R_1 = 9.9966567.$$

Pour le calcul des quantités P et D, nous rassemblons ici plusieurs logarithmes constans qui seront utiles dans les opérations ultérieures

tang b° 9.6278110	sin $(a' - a)$ 9.1414978	sin $(a' - A_1)$ 9.6133857
tang b 9.4465818	sin $(a' - a^\circ)$ 9.6775831	
tang b' 9.3290147	sin $(a - a^\circ)$ 9.5435305	sin $(a^\circ - A_1)$ 9.9004139.

Par ces valeurs, on voit immédiatement que la quantité P

est positive et assez petite; si on la calcule exactement, on trouve P = 0.0046585. Quant à la quantité D, si l'on convient de désigner par [N] le nombre dont le logarithme est N, on aura

$$D = [8.8725452] + [8.7693088] - [9.1241643] = 0.0002617.$$

Cette quantité est positive et fort petite; cependant son signe ne pourrait changer qu'en supposant des erreurs de 4 à 5′ au moins dans quelqu'une des positions observées; et comme ces erreurs sont peu probables, il y a lieu de croire que les quantités P et D sont de même signe, et qu'ainsi on a la distance $r < R$, c'est-à-dire qu'à l'époque de la seconde observation, la comète devait être à une moindre distance du Soleil que la Terre. C'est toute la conséquence que nous tirerons de l'équation (4); car d'ailleurs nous aurons occasion de faire voir que cette équation est fort défectueuse.

17. La petitesse de la quantité P qui sert de dénominateur aux formules (5), nous avertit que cet exemple tombe dans les cas d'exception; c'est pourquoi nous devons recourir aux formules (6) dont l'usage ne présente aucun inconvénient, puisque le mouvement en longitude est assez considérable.

Ces formules simplifiées en faisant $e = 0$, $E = 0$, $\lambda = \frac{\theta}{\theta+\theta'}$, $\lambda' = \frac{\theta'}{\theta+\theta'}$, se réduisent aux suivantes

$$\sigma' = \sigma\,[0.0432409], \quad \sigma^\circ = \sigma\,[9.9386417],$$

mais l'approximation qu'on en déduirait serait fort imparfaite, parce que, dans cet exemple, les intervalles θ et θ' sont trop éloignés de l'égalité.

Dans tous les cas semblables, il convient de ne point se servir des équations ainsi simplifiées, et de substituer immédiatement dans les formules (6), les valeurs de θ et θ', tirées des formules (9), ce qui donnera les valeurs suivantes de σ°

et σ', exprimées par les deux indéterminées σ et r.

$$\sigma^\circ = \sigma[6.9386417] - \frac{\sigma}{r^3}[7.740864] - \frac{1}{r^3}[8.086264] + [8.096776],$$

$$\sigma' = \sigma[0.0432409] - \frac{\sigma}{r^3}[7.643860] + \frac{1}{r^3}[8.075856] - [8.086371].$$

On prendra d'abord une valeur hypothétique de σ, d'après laquelle on calculera le rayon vecteur r par la formule

$$r^3 = 0.9839930 - \sigma\,[0.2185267] + \sigma^3\,[0.0326962];$$

r étant connu à peu près (car les premiers calculs n'exigent pas beaucoup de précision), on calculera les quantités σ° et σ' par les deux formules précédentes.

Ensuite on calculera r°, r', V et c, par les formules

$$r^{\circ 3} = 0.9881934 - \sigma^\circ\,[0.1403596] + \sigma^{\circ 3}\,[0.0719354],$$
$$r'^3 = 0.9819876 - \sigma'\,[0.2363369] + \sigma'^3\,[0.0193249],$$
$$\mathrm{V} = 0.9634042 - \sigma^\circ\,[9.7199492] + \sigma^\circ\sigma'[9.9867701] - \sigma'\,[9.9766975],$$
$$c^2 = r^{\circ 2} + r'^2 - 2\mathrm{V};$$

enfin on vérifiera l'hypothèse, ou on en connaîtra l'erreur par l'équation des temps

$$6(\theta + \theta') = (r^\circ + r' + c)^{\frac{3}{2}} - (r^\circ + r' - c)^{\frac{3}{2}} = 1.2422687.$$

18. Comme il serait inutile de rapporter ici des essais de calcul trop éloignés du vrai résultat, nous ferons pour première hypothèse $\sigma = 0.6 = [9.7781512]$, ce qui donnera d'abord.... $r^3 = 0.3797624 = [9.5795120]$, $r = [9.7897560]$; on aura ensuite par l'application de nos formules

Digitized by Google

$\sigma^2 = [9.6695087]$, $\sigma' = [9.8389800]$,

$r'^2 = 0.6003290 = [9.7783893]$ $\quad r'^2 = 0.2906613 = [9.4634172]$
$r^2 = 0.7748089 = [9.8891946]$ $\quad 0.6003290 \quad [9.7317086] = r'^2$
$r' = 0.5391475$ $\quad r^2 + r'^2 = 0.8909903$
$r^2 + r' = 1.3139564$ $\quad 2V = 0.7537670$
$c = 0.3704366$ $\quad c^2 = 0.1372233 = [9.1374278]$
$a = 1.6843930$ $\quad [9.5687139] = c$
$b = 0.9435208$

$a^{\frac{1}{3}} = 2.1860775$
$b^{\frac{1}{3}} = 0.9164888$
diff. 1.2695887
1.2422687
erreur $+273200$

Soit pour seconde hypothèse $\sigma = 0.58 = [9.7634280]$, on aura les résultats suivans

$r^2 = 0.3873962 = [9.5881554]$, $r = [9.7940777]$,
$\sigma^2 = [9.6553750]$, $\sigma' = [9.8243310]$,

$r'^2 = 0.6047739 = [9.7815930]$ $\quad r'^2 = 0.2976389 = [9.4736897]$
$r^2 = 0.7776711 = [9.8907965]$ $\quad 0.6047739 \quad [9.7368448] = r'^2$
$r' = 0.5455629$ $\quad r^2 + r'^2 = 0.9024128$
$r^2 + r' = 1.3232340$ $\quad 2V = 0.7727434$
$c = 0.3600963$ $\quad c^2 = 0.1296694 = [9.1128375]$
$a = 1.6833303$ $\quad [9.5564187] = c$
$b = 0.9631377$

$a^{\frac{1}{3}} = 2.1840703$
$b^{\frac{1}{3}} = 0.9452192$
1.2388511
1.2422687
erreur -34176

Il résulte de ces deux erreurs qu'en faisant $n = \frac{34176}{307376} = 0.11119$, la quantité qui a pour valeur A dans la première hypothèse et B dans la seconde, aura pour vraie valeur $A - n(B - A)$. On trouvera ainsi la solution suivante:

$\sigma^2 = [9.6569463]$, $r^2 = [9.8906184]$, $c = [9.5577858]$,
$\sigma = [9.7650651]$, $r = [9.7935971]$,
$\sigma' = [9.8259598]$, $r' = [9.7362737]$.

Dans les cas ordinaires, on pourrait s'arrêter à ce premier résultat, et on en tirerait des élémens de l'orbite suffisamment

approchés. Mais, dans le cas présent, où il y a une grande inégalité entre les intervalles de temps θ et θ', les quantités λ et λ' n'ont pas été déterminées assez exactement, et on ne doit considérer le résultat précédent que comme une première approximation qui a besoin d'être rectifiée.

19. Au moyen des valeurs trouvées pour r^o, r, r', il faudra calculer les valeurs de λ, λ', $1-c$, $e-E$, par les formules

$$E=\frac{\frac{1}{2}\theta'}{R^oRR'}, \quad e=\frac{\frac{1}{2}\theta'}{r^orr'}, \quad \zeta=\frac{m\theta^2}{6(r^or)^{\frac{3}{2}}}-\frac{m\theta'^2}{6(r^or')^{\frac{3}{2}}},$$

$$\log\lambda=\log\left(\frac{\theta}{\theta+\theta'}\right)-\frac{\theta'}{\theta+\theta'}\cdot\zeta, \quad \log\lambda'=\log\left(\frac{\theta'}{\theta+\theta'}\right)+\frac{\theta}{\theta+\theta'}\cdot\zeta,$$

et on trouvera les résultats suivans :

$$\zeta=[7.3643107], \quad (e-E)=[8.1358552],$$
$$\lambda=[9.8219310], \quad (1-e)=[9.9919393],$$
$$\lambda'=[9.5268112].$$

Substituant ces valeurs dans les équations (6), on aura de nouvelles expressions de σ^o et σ' qui ne renferment plus que σ d'inconnue, savoir :

$$\sigma^o=\sigma[9.9290428]-[8.5415033],$$
$$\sigma'=\sigma[0.0359557]+[8.5334117];$$

si l'on prenait pour première hypothèse la valeur de σ qui résulte de la première approximation, savoir $\sigma=[9.7650651]$, on trouverait que cette valeur est encore loin de satisfaire aux équations du problème, et qu'il faut l'augmenter notablement, ce qui prouve que la première approximation n'est pas suffisante.

La raison en est que pour la première approximation, on a supposé les rayons vecteurs r^o, r' égaux à r, dans les valeurs de λ, λ', e; cette supposition ne produit qu'une différence assez petite dans la valeur de e; mais dans celle de ζ qui sert à

Digitized by Google

trouver λ et λ', elle en produit une fort grande; elle donne en effet $\zeta = \frac{m(\theta^2 - \theta'^2)}{6r^3} = [7.6290203]$, quantité presque double de la valeur plus approchée $\zeta = [7.3643107]$.

20. Soit donc pour 1re hypothèse $\sigma = 0.6045 = [9.7813963]$, on en déduira

$$\rho^0 = [9.6799602], \qquad \rho' = [9.8393705],$$

$r^{02} = 0.5973194 = [9.7762067]$ $\qquad$ $r'^2 = 0.2905081 = [9.4631582]$

$r^0 = 0.7728645 = [9.8881033]$ $\qquad$ $0.5973194 \quad [9.7315791] = r'$

$r' = 0.5389880$ $\qquad$ $r^{02} + r'^2 = 0.8878275$

$r^0 + r' = 1.3118525$ $\qquad$ $2V = 0.7564613$

$c = 0.3624447$ $\qquad$ $c^2 = 0.1313662 = [9.1184836]$

$a = 1.6742972$ $\qquad$ $c = [9.5592418]$

$b = 0.9494078$

$a^{\frac{3}{2}} = 2.1664512$

$b^{\frac{3}{2}} = 0.9250798$

1.2413714

1.2422687

err. -8973

Soit pour seconde hypothèse $\sigma = 0.6055 = [9.7821141]$, on aura les résultats suivans:

$$\rho = [9.6807303], \qquad \rho' = [9.8400529],$$

$r^{02} = 0.5971062 = [9.7760516]$ $\qquad$ $r'^2 = 0.2902065 = [9.4627072]$

$r^0 = 0.7727264 = [9.8880258]$ $\qquad$ $0.5971062 \quad [9.7313536] = r'$

$r' = 0.5387082$ $\qquad$ $r^{02} + r'^2 = 0.8873127$

$r^0 + r' = 1.3114346$ $\qquad$ $2V = 0.7556592$

$c = 0.3628408$ $\qquad$ $c^2 = 0.1316535 = [9.1194324]$

$a = 1.6742754$ $\qquad$ $c = [9.5597162]$

$b = 0.9485938$

$a^{\frac{3}{2}} = 2.1664090$

$b^{\frac{3}{2}} = 0.9238902$

1.2425188

1.2422687

err. $+2501$

D'après ces deux erreurs, on trouve que le milieu à prendre entre les deux valeurs A et B d'une même quantité, données par les deux hypothèses, est $B + (A - B)(0.218)$. On obtient ainsi les valeurs logarithmiques suivantes des rayons vecteurs r^0, r, r':

$$r^0 = [9.8880427], \quad r = [9.7886828], \quad r' = [9.7314028].$$

Digitized by Google

Ces valeurs sont assez différentes de celles qu'avait données la première approximation; c'est pourquoi il conviendra de procéder à une troisième opération dans laquelle nous donnerons aux équations (6) un dernier degré d'exactitude.

21. Voici d'abord les valeurs rectifiées de λ, λ', $1-e$, qui résultent des valeurs précédentes de r^o, r, r';

$$\lambda=[9.8219155],\quad \lambda'=[9.5268419],\quad 1-e=[9.9918188];$$

substituant ces valeurs dans les formules de l'art. 10, qui deviennent dans notre exemple

$$\varpi\cos A_1=\lambda[9.8713530]+\lambda'[9.9378419]-(1-e)[9.8969484],$$
$$\varpi\sin A_1=\lambda[9.8162347]+\lambda'[9.6874819]-(1-e)[9.7792587],$$

on en déduit

$$\varpi\cos A_1=[8.0399020],\quad \text{tang } A_1=[9.8716711],$$
$$\varpi\sin A_1=[7.9115731],\quad A_1=36^\circ 39' 20'',$$
$$\varpi=[8.1355982].$$

On voit que l'angle A_1, ainsi déterminé, diffère sensiblement de celui que nous avions pris pour sa valeur approchée, savoir : $A_1=36^\circ 0' 41''$.

Substituant ces valeurs dans les formules suivantes qui tiennent lieu des formules (6);

$$\sigma^o=\frac{(1-e)\,\sigma\sin(a'-a)-\varpi\sin(a'-A_1)}{\lambda'\sin(a'-a^o)},$$
$$\sigma'=\frac{(1-e)\,\sigma\sin(a-a^o)+\varpi\sin(a^o-A_1)}{\lambda\sin(a'-a^o)},$$

on aura

$$\sigma^o=\sigma\,[9.9288916]-[8.5552427],$$
$$\sigma'=\sigma\,[0.0358507]+[8.5401948].$$

A l'aide de ces deux équations, on ne tardera pas à obtenir le dernier degré d'approximation dont nos formules sont susceptibles.

Digitized by Google

22. Soit 1°. $\sigma = [9.7790000]$; on aura les résultats suivans :

$\sigma^{\circ} = [9.6762045]$, $\sigma' = [9.8373329]$,

$r^{m} = 0.59837755 = [9.7769753]$ $r'^{s} = 0.2914\,2015 = [9.4645196]$
$r^{\circ} = 0.77354866 = [9.88848765]$ $r^{m} = 0.59837755$ $[9.7322598]$

$r' = 0.53983346$ 0.8897977
$r^{\circ} + r' = 1.3133821\,2$ $a^{\frac{3}{5}} = 2.1694623$ $2V = 0.7584162$
$c = 0.3624\,6583$ $b^{\frac{3}{5}} = 0.9272854$ $c^{s} = 0.1313815 = [9.1185342]$
$a = 1.6758479\,5$ 1.2421769 $c = [9.5592671]$
$b = 0.9509162\,9$ 1.2422687
err. $-\ 918$

Soit 2°. $\sigma = [9.7791000]$; on aura

$\sigma = [9.6763121]$, $\sigma' = [9.8374279]$,

$r^{m} = 0.5983468 = [9.7769530]$ $r'^{s} = 0.2913772 = [9.46445553]$
$r^{\circ} = 0.77352877 = [9.8884765]$ $r^{m} = 0.5983468$ $[9.7322776]$

$r' = 0.53979365$ 0.8897240
$r^{\circ} + r' = 1.3133244\,2$ $a^{\frac{3}{5}} = 2.1694511$ $2V = 0.7583036$
$c = 0.3625\,2025$ $b^{\frac{3}{5}} = 0.9271186$ $c^{s} = 0.1314\,2094 = [9.1186646]$
$a = 1.6758426\,7$ 1.2423325 $c = [9.5593323]$
$b = 0.9508021\,7$ 1.2422687
err. $+\ 638$

de là résulte la solution suivante :

$\sigma^{\circ} = [9.6762680]$, $r^{\circ} = [9.8884811] = 0.77353695$,
$\sigma' = [9.8373895]$, $r' = [9.7322409] = 0.5398\,1000$,
$c = [9.5593056] = 0.3624980$.

23. Voici, d'après cette solution, le calcul des élémens par les formules (14), (15), etc.

$s = 0.8379225 = [9.9232039]$, $\quad s - r^\circ = 0.0643855 = [8.8087885]$,
$u = 0.4754245 = [9.6770815\,4]$, $\quad s - r' = 0.2981125 = [9.4743801\,5]$.

$s-r'$..	9 4743801 5	$s-r^\circ$... 8.8087880 5	c..... 9.5593056
$\sqrt{s}$.....	9.9616019 5	$\sqrt{u}$... 9.8385407 7	$\sqrt{r^\circ}$..... 9.9442405 5
A.....	9.4359821	B..... 8.6473288 2	$c\sqrt{r^\circ}$..... 9.5035461 5
	9.9228890	9.4359821	
A—B..	9.3588711	9.2113467 2	$L(A-B) = LA + L\left(1-\frac{B}{A}\right)$
$c\sqrt{r^\circ}$..	9.5035461 5	$\frac{B}{A}$ = 0.1626847	
$\sin\frac{1}{2}\psi^\circ$	9.8553249 5	0.8373153	
$\cos\frac{1}{2}\psi^\circ$	9.8434835		
$\cos^2$.....	9.6869670	Par les formules directes, on trouve.....	$\tan\frac{1}{2}\psi^\circ = [0.0118412]$, $\Pi = [9.5754477]$.
r°.....	9.8884811		
Π.....	9.5754481		

Nous nous en tiendrons au premier résultat, qui paraît devoir être le plus exact; nous calculerons ensuite le temps employé à parcourir l'anomalie ψ°, par la formule.....

$$t = (2\Pi^3)^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{S}\tfrac{1}{2}\psi^\circ + \tfrac{1}{3}\mathfrak{S}^3\tfrac{1}{2}\psi^\circ)\,[1.7644179];$$

il en résulte.....	$t =$	26.35895
époque de la 1re observation.....	octobre	22.68488
passage au périhélie.....	novemb.	18.04383.

Suit le calcul des latitudes et longitudes héliocentriques.

σ°.....	9.6762680	σ'.....	9.8373889 5
$1 : r^\circ$.....	0.1115189	$1 : r'$.....	0.2677591
tang b°.....	9.6278110	tang b'.....	9.3290147
sin $\mathfrak{C}^\circ$.....	9.4155979	sin $\mathfrak{C}'$.....	9.4341627 5
cos $\mathfrak{C}^\circ$.....	9.9847557 8	cos $\mathfrak{C}'$.....	9.9833416 4
tang $\mathfrak{C}^\circ$.....	9.4308221 2	tang $\mathfrak{C}'$.....	9.4508211 1
cot b°sin$(a^\circ - A^\circ)$	0.2289950	cot b'sin$(a' - A')$	0.3647019
sin $(\alpha^\circ - A^\circ)$...	9.6598371	sin $(\alpha' - A')$....	9.8155230 1
$\alpha^\circ - A^\circ$....	= 27° 11′ 18″	$\alpha' - A'$....	= 40° 50′ 15″45
A°.....	= 29.19.50	A'.....	= 41.22.26
α°.....	= 56.31. 8	α'.....	= 82.12.41.45

Pour calculer la longitude N du nœud ascendant, on a la formule $\text{tang}\left(\frac{\alpha'+\alpha^\circ}{2}-N\right)=\frac{\sin(\zeta'+\zeta^\circ)}{\sin(\zeta'-\zeta^\circ)}\text{tang}\frac{\alpha'-\alpha^\circ}{2}$, d'où résulte..... $-N=14^\circ 52'36''$; mais il est bon de vérifier cette valeur par la double équation $\cot I=\cot\zeta^\circ\sin(\alpha^\circ-N)=\cot\zeta'\sin(\alpha'-N)$; voici le calcul pour cet objet, en supposant..... $-N=14^\circ 52'36''+10''(x)$, $10''(x)$ étant une correction indéterminée :

$\alpha^\circ-N=71^\circ 23'44''+10''(x)$,	$\alpha'-N=97^\circ 5'17''45+10''(x)$,
$\sin(\alpha^\circ-N)$ 9.9766909$+70x$,	$\sin(\alpha'-N)$ 9.9966684$9-26x$
$\cot\zeta^\circ$..... 0.5691578$8$,	$\cot\zeta'$.... 0.5491788$9$
$\cot I$..... 0.5458487$8+70x$,	$\cot I$..... 0.5458473$8-26x$;

égalant ces deux valeurs, on a $14+96x=0$, $x=-0.146$, et $10''(x)=-1''46$; donc

$$-N=14^\circ 52'34''54,\quad \cot I=[0.54584776],$$
$$N=345.\ 7.25.46,\quad I=15^\circ 53'\ 0''54;$$

enfin nous avons à calculer la formule $\cos H=\cos\zeta^\circ\cos(\alpha^\circ-N)$, pour avoir le lieu du périhélie :

	$\alpha^\circ-N=71^\circ 23'42''54$		
		$H=$	$72^\circ\ 5'32''9$
$\cos(\alpha^\circ-N)$....	9.5038445	$\Upsilon^\circ=$	91.53.43.3
$\cos\zeta^\circ$.....	9.9847558	$N=$	345. 7.25.5
$\cos H$.....	9.4886003	lieu du pér.	148.44.41.7

En rassemblant tous ces résultats, on a les élémens de l'orbite comme il suit :

Log Π.....		9.5754481
Passage au périhélie.....	nov.	18.04383
Inclinaison.....		$15^\circ 53'\ 0''54$
Lieu du nœud asc.....		345. 7.25.5
Lieu du périhélie.....		148.44.41.7

Digitized by Google

24. Ces élémens diffèrent assez notablement des élémens corrigés qu'on trouve pag. 30 du premier supplément; cependant on va voir qu'ils représentent plus exactement les trois observations d'où ils sont tirés.

Calcul du lieu du 30 octobre.

Époq. donnée, oct.	30.68670			t....	1.2638047 8
Pass. au pér. nov.	18.04383			$n^{\frac{1}{2}}$..	9.3631721 5
t =	18.35713			T...	1.9006326 3
$\cos\frac{1}{2}\psi$.....	9.9829734 5			T =	79.548617
cos°.....	9.7859469			ψ =	77° 11′ 20″ 66
Π.....	9.5754481			pér.—☊ =	163.37.16.20
r.....	9.7895012			K =	86.25.55.54
sin I.....	9.4372462	cos I.....	9.9850939	α—N =	86.17.27.03
sin K.....	9.9991574 1	cot K....	8.7948540	N =	345. 7 25.50
sin C.....	9.4364036 1	cot(α—N)	8.8117601	α =	71.24.52.53
cos C.....	9.9831620 5			A =	37.19.48
r.....	9.7895012	*voyez* le triangle SQT		S =	34. 5. 4.53
SQ.....	9.7726632 5	dans la fig. 3.			
cos S.....	9.9181410 2			SQ..	9.7726632 5
SI.....	9.6908042 7	R.....	9.9964960	sin S	9.7485107 9
R.....	9.9964960	a.....	9.7035822 3	QI..	9.5211740 4
	9.6943082 7	TI.....	9.7000782 3	TI..	9.7000782 3
	0.4946617			tang T..	9.8210958 1
a.....	0.5053383			T =	33°31′ 8″4
r.....	9.7895012			180° + A =	217.19.48
sin C.....	9.4364036 1			a =	183.48.39.6
cos T.....	9.9210112 2			long. observ...	183.48.32
	9.1469160 3			erreur....	+ 7.6
TI.....	9.7000782 3				
tang b.....	9.4468378				
b.....	= 15°37′ 52″ 6				
lat. observ...	15.37.21				
erreur...	+ 31.6				

l'erreur est donc de 7″,6 sur la longitude, et de 31″,6 sur la latitude. Par les élémens corrigés, on voit, pag. 31, que l'erreur est de 33″ sur la première et de 41″ sur la seconde.

25. Quant aux lieux des 22 octobre et 3 novembre, ils sont représentés avec l'erreur de quelques secondes seulement par les élémens corrigés; mais, d'après la nature de notre méthode, ils doivent être représentés exactement par les élémens que nous venons de trouver. C'est ce que nous allons vérifier par des calculs qu'on doit regarder comme inutiles, mais qui pourront servir d'exemple à des calculateurs peu exercés.

Calcul du lieu du 22 octobre.

Époque....	oct. 22.68488	t...	1.4209281	Ψ.....	= 91°33′43″ 4
Pass. au pér.	nov. 18.04383	$n^{\frac{3}{2}}$..	9.3631721 5	Γ.....	= 163.37.16. 2
	t = 26.35895	T...	2.0577559 5	K. ...	= 72. 3.32. 8
cos ½ Ψ.....	9.8434834 3	T =	114.223618		
cos^2.	9.6869668 6				
Π.....	9.5754481	sin I	9.4372462	cos I.....	9.9830939
r.....	9.8884812 4	sin K	9.9783516 3	tang K....	0.4897507
cos $\mathfrak{C}$.....	9.9847557 8	sin $\mathfrak{C}$	9.4155978 3	tang(α—N)	0.4728446
SQ.....	9.8732370 2				
				α—N..	= 71°23′42″43
cos S.....	9.9491506 6			N.....	= 345. 7.25.50
SI.....	9.8223876 6	R...	9.9974210	α.....	= 56.31. 7.93
R.....	9.9974210	a...	9.5207552 6	A.....	= 29.19.50
	9.8249666 6	TI...	9.5181762 6	S.....	= 27.11.17.93
	0.6682925 5				
a.....	0.3317074 5			SQ.....	9.8732370 2
				sin S.....	9.6598368 1
r sin $\mathfrak{C}$.....	9.3040790 7			QI.....	9.5330738 3
cos T.....	9.8419086 1			TI.....	9.5181762 6
	9.1459876 8			tang T....	0.0148975 7
TI.....	9.5181762 6				
tang b.....	9.6278114 2			T.....	= 45°58′57″
				180°+A	= 209.19.50
b.....	= 22°59′53″1			α.....	= 163.20.53
observ.....	22.59.53			observ....	163.20.53
erreur..	+ 0.1			erreur. ...	0

Calcul du lieu du 3 novembre.

Époque... Nov.	3.72088	t...	1.1560324 9	ψ..... =	66°48′ 5″ 2
Périhélie.....	18.04383	$n^{\frac{3}{2}}$..	9.3631721 5	Γ..... =	163.37.16. 2
t =	14.32295	T...	1.7928603 4	K. ... =	96.49.11
$\frac{1}{2}\psi$..... =	33.24. 2. 6	T =	62.066934		
cos $\frac{1}{2}\psi$.....	9.9216036 9	sinI..	9.4372462	cos I.....	9.9830939
cos^2.....	9.8432073 8	sin K	9.9969163 4	—tang K..	9.9222982 4
Π.....	9.5754481	sin ζ	9.4341625 4	-tang(α-N)	0.9053921 4
r.....	9.7322407 2			α—N.. =	97° 5′ 15.84
cos ζ.....	9.9833416 6			N..... =	345. 7.25.50
SQ.....	9.7155823 8			α..... =	82.12.41.34
cos S.....	9.8788468 8			A..... =	41.22 26
SI.....	9.5944292 6			S. .... =	40.50.15.34
R.....	9.9960530	R...	9.9960530		
	9.5983762 6	a....	9.7805898 2	SQ.....	9.7155823 8
	0.8966215	TI...	9.7766428 2	sin S.....	9.8155227 3
a.....	0.6033785			QI.....	9.5311051 1
r sin ζ.....	9.1664032 6			TI.....	9.7766428 2
cos T.....	9.9392540 2			tang T....	9.7544622 9
	9.1056572 8			T..... =	29°36′ 10″ 9
TI.....	9.7766428 2			180° + A =	221.22.26
tang b.....	9.3290144 6			α..... =	191.46.15.1
b..... =	12° 2′ 29″			observ....	191.46.15
observ....	12. 2 29			erreur..	+ 0.1
diff....	0				

26. Il résulte de ces calculs qu'en effet l'orbite trouvée par la seconde méthode, satisfait aux trois observations données plus exactement que l'orbite corrigée de la pag. 30, Ier suppl. Nous n'en conclurons pas qu'elle doit être préférée à celle-ci, car la véritable orbite est celle qui satisfait le mieux à l'ensemble de toutes les observations, et non pas seulement à trois observations déterminées.

Dans les cas ordinaires, il n'est pas nécessaire de ponsser la précision aussi loin que nous l'avons fait dans cet exemple;

alors les calculs deviennent plus courts et plus faciles. A plus forte raison n'a-t-on pas besoin, dans la pratique, de rechercher une parabole plus approchée que celle à laquelle nous sommes parvenus. Cependant, comme cette question peut être de quelqu'intérêt pour les analystes, nous allons faire voir quels moyens il faudrait employer pour la résoudre.

On a dû voir, par les calculs précédens, qu'il suffit de connaître les deux distances accourcies σ° et σ', pour être en état de déterminer les élémens de l'orbite parabolique par un calcul rigoureux et purement trigonométrique; car, par ces deux distances et les données de l'observation, jointes à celles que fournit le mouvement de la Terre, on connaît immédiatement les deux rayons vecteurs r°, r', et la corde c qui joint leurs extrémités. Ensuite des quantités r°, r', c, on déduit facilement la distance périhélie Π, l'anomalie ψ° qui répond au premier rayon vecteur r°, et l'instant du passage au périhélie. Enfin les mêmes quantités jointes aux deux premières σ°, σ', font connaître le lieu du nœud N, l'inclinaison I, et l'angle H qui donne le lieu du périhélie sur l'orbite $H+\psi^\circ+N$.

Supposons maintenant qu'à la place des valeurs connues σ°, σ', nous mettions $\sigma^\circ(1+x)$ et $\sigma'(1+y)$, x et y étant des corrections très petites dont on négligera les puissances et les produits au-delà du premier degré; il en résultera des valeurs de r°, r', c, affectées des corrections x et y; ces valeurs étant substituées dans l'équation des temps, on aura une première équation entre x et y, au moyen de laquelle il ne restera plus à déterminer que la correction x.

D'après les valeurs de r°, r', c, affectées chacune d'une correction de la forme kx, on déterminera les élémens de l'orbite; et par ces élémens, on calculera ensuite le lieu de la comète à l'instant de la seconde observation. On trouvera ainsi une erreur sur la longitude qui sera de la forme $7'',6+mx$, et une sur la latitude qui sera $31'',6+nx$; il sera donc facile de déter-

miner la valeur de x, telle que ces erreurs soient anéanties en tout ou en partie, ce qui fera connaître la parabole la plus approchée de la véritable orbite.

27. Nous allons appliquer ce procédé à notre exemple. Soit pour cet effet $d\sigma^o = \sigma^o x$, $d\sigma' = \sigma' y$.

L'équation entre σ et r étant de la forme $r^2 = A - B\sigma + C\sigma^2$, on en tire $2rdr = (2C\sigma - B)d\sigma$, ce qui donne

$$dr^o = -x(0.08021), \quad d(r^{o2}) = -x(0.12408),$$
$$dr' = -y(0.18170), \quad d(r'^2) = -y(0.19617).$$

Dans cette même hypothèse où l'on fait $d\sigma^o = \sigma^o x$ et $d\sigma' = \sigma' y$, on aura

$$dV = x(0.06753) - y(0.33522),$$
$$d(c^2) = d(r^{o2} + r'^2 - 2V) = -x(0.25914) + y(0.47427),$$
$$dc = -x(0.35745) + y(0.65417);$$

or, d'après l'équation des temps, il faut que la quantité..... $(r^o + r' + c)^{\frac{3}{2}} - (r^o + r' - c)^{\frac{3}{2}}$, soit indépendante des corrections x et y; ainsi on doit avoir

$$s^{\frac{1}{2}}(dr^o + dr' + dc) - u^{\frac{1}{2}}(dr^o + dr' - dc) = 0,$$

ou

$$0 = -x(0.43766) + y(0.47247) - \left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{1}{2}}[x(0.27724) - y(0.83587)];$$

substituant la valeur $\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{1}{2}} = [9.8769388]$, on trouve

$$y = x[9.768343].$$

Au moyen de ce rapport, toutes les corrections s'expriment par la seule indéterminée x, et on trouve

$$r^o = 0.7735370 - x(0.08021),$$
$$r' = 0.5398100 - x(0.106585),$$
$$c = 0.3624980 + x(0.026295).$$

Puisque nous n'avons plus qu'une seule indéterminée x, et que

le calcul des élémens a déjà été fait dans la supposition de $x=0$, on pourra donner une valeur déterminée à x, ce qui simplifiera les calculs, et cependant les résultats étant comparés à ceux que donne l'hypothèse $x=0$, on en pourra déduire ceux qui répondent à une valeur quelconque de x.

28. Soit donc $x=10000$ unités décimales du septième ordre, on aura

$r''=0.7734568$,	d'où résultent les	log Π.....	9.5753680g
$r'=0.5397034$	élémens de l'orbite	périhélie...	nov. 18.039692
$c=0.3625243$	qu'on joint ici.	inclinaison.	15°53′ 52″13
$\varphi''=[9.6767023]$		lieu du Ω..	345. 7. 7.25
$\varphi'=[9.8378232]$		lieu du pér.	148.47. 7.95

Calculant, d'après ces élémens, la longitude et la latitude pour l'instant de la seconde observation, on trouve l'erreur de la longitude $-0'',7$, et celle de la latitude $+34''$; donc pour une valeur quelconque de x

$$\text{l'erreur sur la longitude} = 7'',6-8'',3\left(\frac{x}{10000}\right),$$

$$\text{et l'erreur sur la latitude} = 31'',6+2'',4\left(\frac{x}{10000}\right).$$

On voit qu'il n'est pas possible de faire disparaître les deux erreurs à la fois; d'ailleurs il convient de ne pas faire x trop grand, pour rester dans l'hypothèse des corrections très petites. C'est pourquoi on peut se borner à rendre nulle l'erreur sur la longitude, ce qui donnera $x=9190$, et alors l'erreur sur la latitude sera 33″,8. On trouverait ensuite facilement les élémens qui ont lieu dans ce système; mais ce résultat n'améliore pas sensiblement la solution du problème.

28. En réfléchissant sur la seconde méthode que nous venons d'exposer et sur l'application que nous en avons faite à un exemple déjà connu, on voit que cette méthode présente trois degrés successifs d'approximation, qui s'obtiennent en donnant aux quantités λ, λ', e, des valeurs de plus en plus approchées.

Digitized by Google

Pour avoir la première approximation, on néglige les quantités du second ordre, et on prend simplement $\lambda = \frac{\theta}{\theta+\theta'}$, $\lambda' = \frac{\theta'}{\theta+\theta'}$, $e = 0$; alors soit qu'on emploie les équations (5) ou les équations (6), on trouve aisément, après quelques essais, une première solution qui sera le plus souvent fort imparfaite, mais qui servira à diriger les hypothèses dans le calcul de la seconde approximation.

Pour obtenir celle-ci, on a égard aux quantités du second ordre; on prend donc les valeurs de λ, λ', e, comme il suit :

$$e = \frac{\frac{1}{2}\theta\theta'}{r^2}, \quad \lambda = \frac{\theta}{\theta+\theta'}\left(1 + \frac{\theta'(\theta'-\theta)}{6r^2}\right), \quad \lambda' = \frac{\theta'}{\theta+\theta'}\left(1 - \frac{\theta(\theta'-\theta)}{6r^2}\right);$$

on laisse alors r indéterminé dans les valeurs de σ° et σ', lesquelles se trouvent exprimées en fonctions de σ et de r; chaque hypothèse faite sur la valeur de σ, donne immédiatement celle de r; on en déduit ainsi des valeurs entièrement connues de σ° et σ', lesquelles servent à calculer les trois quantités r°, r', c, et celles-ci étant substituées dans l'équation des temps, on a l'erreur de l'hypothèse. Enfin par deux erreurs semblables, supposées l'une et l'autre assez petites, on trouve la vraie solution.

Tel est ce que nous appelons le second degré d'approximation; il répond à celui que donne notre première méthode, simplifiée dans le premier supplément, et en général ce degré est très suffisant pour les besoins de la pratique.

29. La méthode de M. Ivory, qui coïncide avec celle de M. Olbers dans les cas ordinaires, donnerait un pareil degré d'approximation, et s'accorderait presqu'entièrement avec la nôtre, si l'auteur n'avait pas négligé les termes du second ordre dans la valeur des quantités analogues à celles que nous appelons λ et λ'. Ainsi M. Ivory suppose, comme M. Olbers, que la corde c est toujours coupée exactement en raison des temps θ et θ', par le rayon vecteur intermédiaire SC; or, cette supposition, qui est permise lorsque les temps θ et θ' sont peu différens l'un de l'autre, ne l'est plus, lorsqu'il y a une inégalité

Digitized by Google

sensible entre eux, et surtout lorsqu'en même temps les rayons vecteurs r^o, r, r', sont plus petits que la distance moyenne de la Terre au Soleil, comme cela arrive dans l'exemple que nous avons calculé.

La méthode de M. Ivory dont nous venons de parler, est fondée sur le rapport des distances accourcies σ^o, σ', qu'on déduirait des équations (5), en mettant R et A au lieu de R1 et A1 qui sont plus approchés; elle a d'ailleurs l'inconvénient d'employer des auxiliaires inutiles, comme l'a déjà remarqué M. Burckhardt, dans la Connaissance des Tems de 1819.

M. Ivory a modifié sa méthode pour la rendre applicable aux cas d'exception qui ont lieu, lorsque le lieu du Soleil est à peu près dans le même grand cercle que les lieux apparens de la comète dans la première et la troisième observation. Alors cette méthode se rapproche de celle que nous suivons, en faisant usage des équations (6); mais elle est encore compliquée par des auxiliaires inutiles, et elle suppose toujours que la corde est partagée exactement en raison des temps, ce qui doit l'empêcher, dans bien des cas, d'atteindre la même précision que donne notre second degré d'approximation.

3o. Enfin, dans ce que nous appelons le troisième degré d'approximation, nous avons pour but d'obtenir une parabole qui satisfasse aussi exactement qu'il est possible aux trois observations données.

Pour cela, il faut calculer de nouveau les quantités λ, λ', e, au moyen des valeurs de r^o, r, r', trouvées par le résultat de la seconde approximation, et à l'aide de deux hypothèses sur la valeur de σ, on obtient aisément la solution cherchée.

Les élémens déduits de cette solution satisferont toujours exactement à la première et à la troisième observation; il restera donc à calculer par leur moyen, le lieu géocentrique de la comète, à l'instant de la seconde observation, et ce lieu différera

toujours très peu du lieu observé, à moins que la véritable orbite ne s'écarte sensiblement de la figure parabolique.

Enfin nous avons fait voir comment on peut introduire, dans les élémens de l'orbite, une correction variable qui permettra de satisfaire encore plus exactement, s'il est possible, à la seconde observation. Cette recherche est au reste de pure curiosité, car lorsqu'on a obtenu des élémens qui satisfont exactement à deux des trois observations, et qui représentent à moins d'une minute la longitude et la latitude de la troisième, il est inutile de pousser plus loin l'approximation.

Application à la seconde comète de 1805.

31. Dans le tableau de l'art. 35, 1er supplément, nous prendrons les trois observations suivantes :

Époques.		Longitudes.	Lat. bor.	Long. ⊙—180°.	Log R.
Nov.	16.45203	29° 23′ 37″	30° 2′ 40″	54° 11′ 36″	9.9947847
	23.32241	24.41. 4	27.25.35	61. 8.30	9.9942071
Déc.	5.29581	2. 7.11	3.20.45	73.17. 4	9.9933642

Si au lieu de l'observation du 5 décembre, nous eussions choisi celle du 30 novembre, l'intervalle de temps de la première à la troisième eût été moins grand et moins inégalement partagé par la seconde observation, ce qui aurait produit sans doute des résultats plus exacts. Mais voulant mettre la seconde méthode à l'épreuve, nous avons préféré à dessein les circonstances qui lui sont le plus défavorables, et qui au reste le seraient également aux autres méthodes avec lesquelles on voudrait la comparer.

Nous allons encore donner le détail des diverses parties de l'opération, en faisant les calculs avec un degré de précision que n'exigent pas les applications ordinaires.

Dans cet exemple, on a $\theta = 6.87038$, $\theta' = 11.97340$, $\theta+\theta' = 18.84378$; ces valeurs exprimées en jours moyens doivent être multipliées par le facteur [8.2355821], ce qui donnera les valeurs logarithmiques suivantes :

$$\theta \ldots\ldots 9.0725628 \qquad \frac{\theta}{\theta+\theta'} \ldots\ldots 9.5618127,$$
$$\theta' \ldots\ldots 9.3137996 \qquad \frac{\theta'}{\theta+\theta'} \ldots\ldots 9.8030495.$$
$$\theta+\theta' \ldots 9.5107501$$

A ces premières valeurs, nous joindrons celles de A1 et R1, données par les formules $A_1 = \frac{1}{3}(A^\circ + A + A')$, ... $\log R_1 = \frac{1}{3}\log(R^\circ RR')$,

$$A_1 = 62^\circ 52' 23'', \quad \sin A_1 \ldots\ldots 9.9493892,$$
$$\log R_1 = 9.9941187, \quad \cos A_1 \ldots\ldots 9.6589301.$$

Pour le calcul des quantités P et D, nous rassemblons ici plusieurs logarithmes constans qui auront leur usage dans les opérations ultérieures.

tang b°	9.7622170	$-\sin(a'-a)$	9.5840281	$\sin(A_1-a')$	9.9407776
tang b	9.7151131	$\sin(a^\circ-a')$	9.6610973	$\sin(A_1-a)$	9.7911656
tang b'	8.7668757	$-\sin(a-a^\circ)$	8.9143324	$\sin(A_1-a^\circ)$	9.7416540

D'après ces logarithmes, on peut voir, sans faire le calcul, que P est négatif; ensuite si on se borne à quatre décimales, on aura en valeurs logarithmiques $D = -[9.3462] + [9.3762] - [7.6812] = -0.2219 + 0.2378 - 0.0048 = 0.0111$; d'où l'on voit que DP est certainement négatif, et qu'ainsi on a $r > R$; mais de là rien n'est à conclure pour la valeur de σ.

32. Dans cet exemple, il convient de faire usage des équations (5), dont le dénominateur est suffisamment grand, et qui sont alors les plus simples. On en tire

$$\sigma^\circ = \frac{(1-e)\sigma}{\lambda'}\,[9.9454456], \quad \sigma' = \frac{(1-e)\sigma}{\lambda_\circ}\,[9.1789180];$$

cela posé, sans nous arrêter au premier degré d'approximation, qui ne sert qu'à mettre sur la voie des premières hypothèses, nous passerons immédiatement au second, et pour cela nous appliquerons les formules (9) qui donnent

$$\log\left(\frac{1-e}{\lambda'}\right) = 0.1969505 - \frac{1}{r^3}[7.6565707],$$
$$\log\left(\frac{1-e}{\lambda}\right) = 0.4381873 - \frac{1}{r^3}[7.8191869];$$

nous aurons donc pour calculer σ° et σ' par le moyen de σ et de r, ces formules

$$\sigma^\circ = \sigma\,[0.1423961] - \frac{\sigma}{r^3}[7.602016],$$
$$\sigma' = \sigma\,[9.6171053] - \frac{\sigma}{r^3}[6.998105].$$

Ayant fait d'abord une hypothèse sur la valeur de σ, on calculera r par l'équation

$$r^4 = 0.9736755 + \sigma\,[0.2006555] + \sigma^4\,[0.1035621];$$

connaissant σ et r, on aura par les formules précédentes les valeurs logarithmiques de σ° et σ', ensuite on calculera r°, r', V et c, par les équations

$$r^{\circ 3} = 0.9762689 + \sigma^\circ\,[0.2537951] + \sigma^{\circ 3}\,[0.1253280],$$
$$r'^3 = 0.9699032 + \sigma'\,[9.8033930] + \sigma'^3\,[0.0014818],$$
$$V = 0.9195610 + \sigma^\circ\,[9.8510959] + \sigma^\circ\sigma'[9.9650322] + \sigma'\,[9.7834116],$$
$$c^2 = r^{\circ 2} + r'^2 - 2V;$$

enfin pour vérifier l'hypothèse ou en connaître l'erreur, on a l'équation des temps

$$6(\theta + \theta') = (r^\circ + r' + c)^{\frac{3}{2}} - (r^\circ + r' - c)^{\frac{3}{2}} = 1.9449182.$$

33. Soit pour première hypothèse $\sigma = 0.157 = [9.1958997]$, on aura

$r = [0.0491776]$, $\sigma^2 = [9.3354482]$, $\sigma' = [8.8122961]$,

$r'^2 = 1.42718634 = [0.15448064]$ $r'^3 = 1.0154058 = [0.0066396\overline{4}]$
$r'^2 = 1.19464896$ 0.07724032 $r'^2 = 1.42718634$ $0.0033198\overline{2}$

$r' = 1.00767346$ 2.44259214

$r^2 + r' = 2.2023224\overline{2}$ $a^{\frac{1}{3}} = 4.2890237$ $2V = 2.25119878$

$c = 0.4374852\overline{6}$ $b^{\frac{1}{3}} = 2.3445363$ $c^2 = 0.19142146 = [9.2819268]$
9.6409634

$a = 2.6398076\overline{8}$ 1.9444874
$b = 1.7648371\overline{6}$ 1.9449182

erreur $-$ 43$\overline{8}$

Soit pour seconde hypothèse $\sigma = 0.1572 = [9.1964525]$, on aura

$r = [0.0492463\overline{5}]$, $\sigma^2 = [9.3360023]$, $\sigma' = [8.8128493]$,

$r'^2 = 1.4278420$ $= [0.1548801\overline{6}]$ $r'^3 = 1.0154632 = [0.0066667\overline{6}]$
$r'^2 = 1.1949233\overline{6}$ $0.0773400\overline{8}$ 1.4278420 $0.0033333\overline{8}$

$r' = 1.0077049\overline{2}$ 2.4433112

$r^2 + r' = 2.2026282\overline{8}$ $a^{\frac{1}{3}} = 4.2902153$ $2V = 2.2517578$

$c = 0.4376681\overline{2}$ $b^{\frac{1}{3}} = 2.3447814$ $c^2 = 0.1915534 = [9.2822988]$
$9.6411449\overline{4}$

$a = 2.6402964\overline{0}$ 1.9454339
$b = 1.7649601\overline{6}$ 1.9449182

erreur $+$ 5157

de là résulte la solution suivante

$\sigma^2 = [9.3357004]$, $r^2 = [0.0772856]$, $c = [9.6410992\overline{5}]$,
$\sigma = [9.1961513]$, $r = [0.0492089]$,
$\sigma' = [8.8125478]$, $r' = [0.0033260]$.

Cette solution serait suffisante pour les cas ordinaires, parce que nous avons tenu compte des termes du second ordre; mais

nous pouvons obtenir une plus grande approximation, en tenant compte des termes du troisième ordre.

34. Pour cet effet, il faut déduire du dernier résultat les valeurs corrigées de λ, λ', e, d'après les formules

$$\zeta = \frac{m\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}} - \frac{m\theta^2}{6(r^0r)^{\frac{3}{2}}}, \quad \log\lambda = \log\left(\frac{\theta}{\theta+\theta'}\right) + \frac{\theta'\zeta}{\theta+\theta'},$$

$$e = \frac{\frac{1}{2}\theta\theta'}{r^0rr'}, \qquad \log\lambda' = \log\left(\frac{\theta'}{\theta+\theta'}\right) - \frac{\theta\zeta}{\theta+\theta'},$$

on trouvera ainsi les valeurs logarithmiques

$$1-e=[9.9960622],\ \lambda=[9.5630250],\ \lambda'=[9.8023539],$$

au moyen desquelles on aura

$$\sigma^0 = \sigma\,[0.1391539],\quad \sigma' = \sigma\,[9.6119552],$$

ou simplement, parce qu'on n'a plus besoin de σ,

$$\sigma' = \sigma^0\,[9.4728013].$$

(Nous négligeons ici la correction de A1 qui pourrait se déduire des équations de l'art. 10).

Soit pour première hypothèse $\sigma^0 = [9.5342152]$; on aura $\sigma' = [8.8070165]$.

$r^{\frac{1}{2}}$=1.42573113	=[0.1540576]	$r'^{\frac{1}{2}}$=1.0148052=[0.0063828a]
$r^{\frac{3}{2}}$=1.19403983	0.0770188	1.42573113 0.0031914l
r'=1.00737557		2.44053665
$r^{\frac{3}{2}}+r'^{\frac{3}{2}}$=2.20141540	$a^{\frac{1}{2}}$=4.2872424	2V=2.2489889b
c=0.43766154	$b^{\frac{1}{2}}$=2.3423775	$c^{\frac{1}{2}}$=0.1915476g=[9.28227684]
a=2.63907694	1.9448649	9.6411384a
b=1.76375386	1.9449182	
	err. — 533	

Soit, pour seconde hypothèse, $\sigma^\circ = [9.3343000]$, on aura $\sigma' = [8.8071013]$.

$r^{\circ 2} = 1.42583109 = [0.15406806]$ $r'^2 = 1.014815o9 = [0.006386g2]$

$r^\circ = 1.19408168$ 0.07703403 1.42583109 0.00319346

$r' = 1.00738032$ 2.44064618

$r^\circ + r' = 2.20146200$ $a^{\frac{1}{2}} = 4.2874245$ $2V = 2.24907400$

$c = 0.43768962$ $b^{\frac{1}{2}} = 2.3424143$ $c^2 = 0.19157218 = [9.28233244]$

$a = 2.63915162$ 1.9450102 9.64116622

$b = 1.76377238$ 1.9449182

err. $+ 920$

de là résulte cette solution:

$$\sigma^\circ = [9.3342463], \quad r^\circ = [0.0770244],$$
$$\sigma' = [8.8070476], \quad r' = [0.00319217],$$
$$c = [9.64114862].$$

35. Pour en déduire les élémens de l'orbite, on formera d'abord les nombres s, u, $s - r^\circ$, $s - r'$, et leurs logarithmes, par lesquels on calculera $\frac{1}{2}\psi^\circ$ et Π, comme il suit:

$r^\circ = 1.19405522$ $s \ldots\ 0.1204265\ 7$ $(2s)^{\frac{1}{2}} \ldots\ = 4.2873094$

$r' = 1.00737733$ $u \ldots\ 9.9454096\ 8$ $(2u)^{\frac{1}{2}} \ldots\ = 2.3423910$

$c = 0.43767183$ $su \ldots\ 0.0658362\ 5$ 1.9449184

$2s = 2.63910438$ $s - r^\circ = 0.1254969\ 7$ $(s - r^\circ) \ldots\ 9.0986332$

$s = 1.31955219$ $s - r' = 0.3121748\ 6$ $(s - r') \ldots\ 9.4943979\ 6$

$u = 0.88188036$ $(s - r^\circ)(s - r') \ldots\ 8.5930311\ 8$

$c \ldots\ 9.6411486\ 2$

$\sqrt{r^\circ} \ldots\ 0.0385122$

$c\sqrt{r^\circ} \ldots\ 9.6796608\ 2$

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi^\circ = \frac{(s-r')\sqrt{s-(s-r^\circ)}\sqrt{u}}{c\sqrt{r^\circ}}$$

$(s-r')$.....	9.4943979 6	$(s-r'')$....	9.0986332 2
$\sqrt{s}$.....	0.0602132 8	$\sqrt{u}$.....	9.9727048 4
	9.5546112 4		9.0713380 6
	9.8269523 4		9.5546112 4
	9.3815635 8		9.5167268 2
$c\sqrt{r''}$.....	9.6796608 2		0.3286448 6
$\sin\frac{1}{2}\psi^\circ$.....	9.7019027 6		0.6713551 4
$\cos\frac{1}{2}\psi^\circ$.....	9.9365441 7	Par les formules directes, on trouve	
$\tan\frac{1}{2}\psi^\circ$....	9.7653585 9	$\tan\frac{1}{2}\psi^\circ$	= [9.7653582 3]
$\cos^2\frac{1}{2}\psi^\circ$.....	9.8730883 4	Π.....	= [9.9501131 3]
r''.....	9.0770244		
Π.....	9.9501127 4		

Nous prendrons par un milieu

$$\Pi = [9.9501129], \quad \tfrac{1}{2}\psi^\circ = 30^\circ\,13'\,27''8,$$
$$\tan\tfrac{1}{2}\psi^\circ = [9.7653584], \quad \psi^\circ = 60.26.55.6.$$

Pour avoir l'instant du passage au périhélie, nous calculerons directement la formule

$$t = (2\Pi^3)^{\frac{1}{2}}(\tan\tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{1}{3}\tan^3\tfrac{1}{2}\psi)\,[1.7644179 5],$$

$(2\Pi^3)^{\frac{1}{2}}$.....	0.0756843 5	1)...	= 40.314444
	1.7644179 5	2)...	= 4.560960
$\tan\frac{1}{2}\psi^\circ$....	9.7653584		44.875404
1).....	1.6054607	nov. ...	16.45203
$\tan^3$.....	9.5307168	déc. ...	31.327434
$\frac{1}{3}$.....	9.5228787 5	passage au périhélie.	
2).....	0.6590562 5		

Suit le calcul des latitudes et longitudes héliocentriques:

r^o..... 9.3342463	r'..... 8.8070476	$\mathfrak{C}^o$=6° 0′ 10″205
1:r^o..... 9.9229756	1:r'..... 9.9968078 3	$\mathfrak{C}'$=0.12.47.640
tang b^o.... 9.7622170	tang b'.... 8.7668757	$\mathfrak{C}^o+\mathfrak{C}'$=6.12.57.845
sin $\mathfrak{C}^o$..... 9.0194389	sin $\mathfrak{C}'$..... 7.5707311 3	$\mathfrak{C}^o-\mathfrak{C}'$=5.47.22.565
cos $\mathfrak{C}^o$..... 9.9976120 5	cos $\mathfrak{C}'$..... 9.9999969 9	
tang $\mathfrak{C}^o$.... 9.0218268 5	tang $\mathfrak{C}'$.... 7.5707341 4	
cot b^o..... 0.2377830	cot b'..... 1.2331243	
sin(A^o-a^o) 9.6226778 5	sin($A'-a'$) 9.9760979 6	
sin (A^o-a^o) 8.8822877	sin ($A'-a'$) 8.7799564	
A^o-a^o= 4° 22′ 24″71	$A'-a'$= 3° 27′ 14″97	
A^o= 54.11.36	A'= 73.17. 4	
a^o= 49.49.11.29	a'= 69.49.49.03	
	a^o= 49.49 11.29	
	$\frac{1}{2}(a'+a^o)$= 59.49.30.16	
	$\frac{1}{2}(a'-a^o)$= 10. 0.18.87	

Il faut maintenant calculer le lieu du nœud N par la formule

$$\text{tang}\,[N-\tfrac{1}{2}(a'+a^o)]=\frac{\sin(\mathfrak{C}^o+\mathfrak{C}')}{\sin(\mathfrak{C}^o-\mathfrak{C}')}\,\text{tang}\,\frac{a'-a^o}{2}.$$

tang $\frac{1}{2}(a'-a^o)$....	9.2465510 9	x=	10° 43′ 22″73
sin ($\mathfrak{C}^o+\mathfrak{C}'$).....	9.0345408 4	$\frac{1}{2}(a'+a^o)$	59.49.30.16
	8.2810919 3	N=	70.32.52.89
sin ($\mathfrak{C}^o-\mathfrak{C}'$).....	9.0037866 8	ou N=	250.32.52.89
tang x.....	9.2773052 5		

La seconde valeur de N est celle qu'il convient d'adopter, parce que sin (a^o—N) doit être de même signe que cot $\mathfrak{C}^o$. Mais, comme cette valeur est déduite d'angles assez petits, nous allons la vérifier par la double équation cot I=cot$\mathfrak{C}^o$sin(a^o—N)=cot$\mathfrak{C}'$sin(a'—N). Soit, pour cet effet, N = 250° 32′ 53″ + 10″(x), 10″(x) étant

une correction indéterminée, on aura

$\alpha^\circ - N = 159^\circ\,16'\,18''.29 - 10''(x)$, $\alpha' - N = 179^\circ\,16'\,56''.03 - 10''(x)$,
$20.43.41.71 + 10''(x)$, $0.43.3.97 + 10''(x)$.

$\sin(\alpha^\circ - N)$	9.5489248 1	$\sin(\alpha' - N)$	8.0978509 6 + 16810x
$\cot \mathfrak{C}^\circ$	0.9781731 5	$\cot \mathfrak{C}'$	2.4292658 6
cot I.....	0.5270979.6+556x	cot I.....	0.5271168 2 + 16810x

Égalant ces deux valeurs, on a $16254x = -188.6$, $x = -0.0116$, $10''(x) = -0''.116$, et par conséquent

$N = 250^\circ\,32'\,52''.884$, $I = 16^\circ\,32'\,48''.065$, $\sin I = [9.45453468]$
$\cot I = [0.5270973\ 2]$ $\cos I = [9.9816320\ ]$

Enfin nous avons à calculer H par la formule.....
$\cos H = \cos \mathfrak{C}^\circ \cos(\alpha^\circ - N)$

$\alpha^\circ - N$ =	159° 16′ 18″.4		
$-\cos(\alpha^\circ - N)$	9.9709369 2	H =	158° 27′ 24″.47
$\cos \mathfrak{C}^\circ$	9.9976120 5	$\mathfrak{V}^\circ$ =	60.26.55.60
$-\cos H$	9.9685489 7	N =	250.32.52.88
		lieu du pér.	109.27.12.95

D'après ces résultats, voici les élémens de l'orbite:

Log H.....		9.9501129
Passage au périhélie..	déc.	31.327434
Inclinaison.....		16° 32′ 48″
Lieu du nœud.....		250.32.52.88
Lieu du périhélie....		109.27.12.95

36. Ces élémens diffèrent assez peu des élémens corrigés, pag. 48; ils doivent satisfaire exactement aux deux observations extrêmes, mais il faut voir jusqu'à quel point de précision ils représentent l'observation moyenne.

Calcul du lieu du 23 novembre.

Époq. . nov. 23.32241
Périh... déc. 31.327434
$t = 38.005024$

$\frac{1}{2}\psi = 26°\,50'\,25''225$ { Γ = lieu du pér. — Ω ; K = $\psi - \Gamma$; N1 lieu du nœud desc.

$\cos\frac{1}{2}\psi$	9.9504954 1				
$\cos^2$. .	9.9009908 2				
Π....	9.9501129				
r.....	0.0491220 8				
sin I..	9.4545346 8	cos I.....	9.9816320		
sin K..	9.4065838 4	tang K.....	9.4211869 5		
sin ζ..	8.8611185 2	tang(N1—ω)	9.4028189 5		
cos ζ..	9.9988514 5				
r.....	0.0491220 8				
SQ...	0.0479735 3				
cos S..	9.9984855 6				
SI....	0.0464588 9	R.....	9.9942071		
	9.9942071		9.1067036 9		
	0.0522517 9	TI.....	9.1009107 9		
	1.1278508 8				
r.....	0.0491220 8				
sin ζ..	8.8611185 2				
cos T..	9.9055868				
	8.8158274	b =	27°24'56"84		
TI...	9.1009107 9	observ.	27.25.35		
tang b	9.7149166 1	erreur.	— 38.16		

t.....	1.5798409 8		
$n^{-\frac{1}{2}}$...	0.0748306 5		
T.....	1.6546716 3		
	T = 45.15144		
	ψ = 53°40'50"45		
	Γ = 38.54.20.07		
	K = 14.46.30.38		
	N1 — ω = 14°11'18"41		
	N1 70.32.52.88		
	ω = 56.21.34.47		
	A = 61. 8.30		
	S = 4.46.55.53		
SQ...	0.0479735 3		
sin S...	8.9209908 9		
QI...	8.9689644 2		
TI...	9.1009107 9		
tang T...	9.8080536 3		
	T = 36°25'37"76		
	61. 8.30		
	α = 24.42.52.24		
obs.....	24.41. 4		
err...	+ 1.48.24		

Ainsi les élémens trouvés, qui satisfont exactement aux deux observations extrêmes, ne représentent l'observation moyenne qu'avec une erreur de 1' 48" sur la longitude, et de 38" sur la latitude. On voit néanmoins par le petit tableau de la pag. 47, que ces trois observations sont encore moins bien représentées par

les élémens corrigés; ainsi malgré toutes les difficultés que présentait cet exemple, difficultés qui seront rarement réunies à un pareil degré, la seconde méthode nous a conduits directement à une solution égale, ou même supérieure en exactitude, à celle que nous avons trouvée en combinant ensemble un plus grand nombre d'observations. Il semble qu'on ne peut rien désirer de plus dans la solution analytique du problème des comètes.

Nous avons établi la solution précédente sur les équations (6), nous aurions pu aussi l'établir, et peut-être avec quelque avantage, sur les équations (7) et (8). Pour donner un exemple de l'usage de ces dernières équations, nous supposerons qu'on est déjà parvenu à ce que nous appelons le second degré d'approximation, c'est-à-dire à la solution de l'art. 33, et d'après cette solution, nous déduirons des équations (7) et (8) le troisième degré d'approximation.

Nous avons déjà trouvé $\lambda = [9.5630250]$, $\lambda' = [9.8023539]$, on a en même temps $e = [7.9555119]$, $E = [8.1029764]$, $E - e = [7.5622316]$, $1 - e = [9.9960622]$; substituant ces valeurs et celles des quantités connues dans les deux premières des équations (7) et (8), on aura

$$\sigma^0 = \sigma[0.1397365] - [6.4579480];$$
$$\sigma' = \sigma[9.5768860] + [7.6926182].$$

Soit pour première hypothèse $\sigma = [9.1950000]$; on aura

$\sigma^0 = [9.3341593\overline{6}]$, $\sigma' = [8.8066414]$,

$r^{0\,2} = 1.4256653\overline{3} = [0.1540175\overline{6}]$ $r'^2 = 1.0147632\overline{0} = [0.0063647\overline{1}]$

$r^0 = 1.1940123\overline{1}$ $0.0770087\overline{8}$ $1.4256653\overline{3}$ $0.0031823\overline{5}$

$r' = 1.0073545\overline{6}$ $2.4404285\overline{3}$

$r^0 + r' = 2.2013668\overline{7}$ $a^{\frac{3}{2}} = 4.2871913$ $2V = 2.2488569\overline{8}$

$c = 0.4376889\overline{0}$ $b^{\frac{3}{2}} = 2.3422266$ $c^2 = 0.1915715\overline{5} = [9.2823310\overline{2}]$

$a = 2.6390557\overline{7}$ 1.9449647 $9.6411655\overline{1}$

$b = 1.7636779\overline{7}$ 1.9449182

err. $+ 465$

Soit de nouveau $\sigma = [9.1949700]$; on aura

$$\sigma = [9.3341293_2], \quad \sigma' = [8.8066137_1],$$

$r^{o2} = 1.4256300_1$	$= [0.1540682]$	$r'^{o2} = 1.0147600_7 = [0.0063633_8]$	
$r^o = 1.1939975_5$	0.0770034_1	1.4256300_1	0.0031816_9
$r' = 1.0073530_2$		2.4403900_8	
$r^o + r' = 2.2013505_7$	$a^{\frac{3}{2}} = 4.2871265$	$2V = 2.2488274_8$	
$c = 0.4376786_3$	$b^{\frac{3}{2}} = 2.3422146$	$t^{\frac{3}{2}} = 0.1915626_0 = [9.2823107]$	
$a = 2.6390239_2$	1.9449119		9.6411535
$b = 1.7636719_4$	1.9449182		
	err. -63		

De là résulte cette solution

$\sigma^o \ldots\ldots$ 9.3341329 2,	$r^o \ldots\ldots$ 0.0770040 5
$\sigma' \ldots\ldots$ 8.8066170 3,	$r' \ldots\ldots$ 0.0031817 7
	$c \ldots\ldots$ 9.6411565 7

Voici, d'après ces données, le calcul des élémens de l'orbite :

$r^o = 1.1939992\ 4$	$s \ldots\ldots\ldots$	$0.1204147\ 1$	$(2s)^{\frac{3}{2}} = 4.2871341$		
$r' = 1.0073532\ 0$	$u \ldots\ldots\ldots$	$9.9453879\ 6$	$(2u)^{\frac{3}{2}} = 2.3422160$		
$c = 0.4376798\ 7$	$su \ldots\ldots\ldots$	$0.0658026\ 7$		1.9449181	
$2s = 2.6390323\ 1$	$(s-r^o) \ldots\ldots$	$9.0987022\ 6$			
$s = 1.3195161\ 5$	$(s-r') \ldots\ldots$	$9.4943813\ 6$	$c \ldots\ldots$	$9.6411565\ 7$	
$u = 0.8818362\ 8$	$(s-r^o)(s-r')$	$8.5930836\ 2$	$\sqrt{r^o} \ldots$	$0.0385020\ 2$	
			$c\sqrt{r^o} \ldots$	$9.6796685\ 9$	

$(s-r') \ldots$	$9.4943813\ 6$	$(s-r^o)$	$9.0987022\ 6$	Par les formules	
$\sqrt{s} \ldots\ldots$	$0.0602073\ 5$	$\sqrt{u} \ldots$	$9.9726939\ 8$		
	$9.5545887\ 1$		$9.0713962\ 4$	$\tan g\frac{1}{2}\psi^o = \frac{r^o - \sqrt{(su)}}{\sqrt{(s-r^o)}.\sqrt{(s-r')}}$	
$x) \ldots\ldots$	$9.8269128\ 2$		$9.5545887\ 1$		
	$9\ 3815015\ 3$		$9.5168075\ 3$	$\Pi = \frac{(s-r^o)(s-r')}{(\sqrt{s}-\sqrt{u})^2}$,	
$c\sqrt{r^o} \ldots$	$9.6796585\ 9$		$0.3287059\ 2$		
$\sin\frac{1}{2}\psi^o \ldots$	$9.7018429\ 4$	$x) \ldots\ldots$	$0.6712940\ 8$	on trouve directement	
$\cos\frac{1}{2}\psi^o \ldots$	$9.9365644\ 4$	$\cos^2\frac{1}{2}\psi^o$	$9.8731288\ 8$	$\tan g\frac{1}{2}\psi^o \ldots$	9.7652785
$\tan g\frac{1}{2}\psi^o$	9.7652785	$r^o \ldots\ldots$	$0.0770040\ 5$	$\Pi \ldots\ldots$	$9.9501329\ 9$
		$\Pi \ldots\ldots$	$9.9501329\ 3$		
	par un milieu	$\Pi \ldots =$	$9.9501329\ 6$	$\frac{1}{2}\psi^o = 30^o\,13'\,11''28$	
				$\psi^o = 60.26.22.56$	

$$t = (2\Pi^3)^{\frac{1}{2}} \left(\tang \tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{1}{3}\tang^3 \tfrac{1}{2}\psi\right) [1.7644179\ 5],$$

$(2\Pi^3)^{\frac{1}{2}}$.....	0.0757144 4	1).....	$= 40.309823$
	1.7644179 5	2).....	4.558759
$\tang \frac{1}{2}\psi$°....	9.7652785	t.....	$= 44.868582$
1).....	1.6054108 9	nov.....	16.45203
$\tang^3$.....	9.5305570	déc.....	31.320612
$\frac{1}{3}$.....	9.5228787 5	Passage au périhélie.	
2).....	0.6588466 4		

a°.....	9.3341329 2	a'.....	8.8066170 3	$\mathfrak{C}$.....	$= 6^\circ\ 0'\ 5''558$
$1 : r^\circ$....	9.9229959 5	$1 : r'$....	9.9968182 3	$\mathfrak{C}'$.....	$= 0.12.46.897$
$\tang b^\circ$...	9.7622170	$\tang b'$..	8.7668757	$\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'$..	$= 6.12.52.455$
$\sin \mathfrak{C}^\circ$....	9.0193458 7	$\sin \mathfrak{C}'$...	7.5705109 6	$\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'$..	$= 5.47.18.661$
$\cos \mathfrak{C}^\circ$....	9.9976130 8	$\cos \mathfrak{C}'$...	9.9999970 0		
$\tang \mathfrak{C}^\circ$...	9.0217327 9	$\tang \mathfrak{C}'$..	7.5703139 6	$\sin(\mathfrak{C}+\mathfrak{C}')$	9.0344366 6
$\cot b^\circ$....	0.2377830	$\cot b'$...	1.2331243	$\sin(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}')$	9.0037055 9
$\sin(A^\circ - a^\circ)$	9.6226778 5	$\sin(A' - a')$	9.9760979 6		0.0307310 7
$\sin(A^\circ - a^\circ)$	8.8821936 4	$\sin(A' - a')$	8.7795362 2	$\tang \frac{1}{2}(a' - a^\circ)$	9.2466041 8
$A^\circ - a^\circ = 4^\circ 22' 21''296$		$A' - a' = 3^\circ 27' 2''926$		$\tang x$....	9.2773352 5
$A^\circ = 54.11.36$		$A' = 73.17.4$		x.....	$= 10^\circ 43' 25''34$
$a^\circ = 49.49.14.704$		$a' = 69.50.1.074$		$\frac{1}{2}(a' + a^\circ) =$	59.49.37.89
		a°	49.49.14.704		70.33.3.23
		$\frac{1}{2}(a' + a^\circ) = 59.49.37.889$		$N =$	250.33.3.23
		$\frac{1}{2}(a' - a^\circ) = 10.0.23.185$			

Pour vérifier la valeur de N, soit $N = 250^\circ\ 33'\ 3'' + 10''(x)$

$a^\circ =$	$49^\circ 49' 14''704$	$a' =$	$69^\circ 50' 1''074$
$N =$	$250.33.3 + 10''(x)$	$N =$	$250.33.3 + 10''(x)$
$a^\circ - N =$	$159.16.11.704 - 10''(x)$	$a' - N =$	$179.16.58.074 - 10''(x)$
	$20.43.48.296 + 10''(x)$		$0.43.1.926 + 10''(x)$
$\sin(a^\circ - N)$	$9.5489614\ 3 + 556x$	$\sin(a' - N)$	$8.0975073\ 5 + 1683ox$
$\cot \mathfrak{C}^\circ$....	0.9782672 1	$\cot \mathfrak{C}'$.....	2.4296860 4
$\cot I$.....	$0.5272286\ 4 + 556x$	$\cot I$.....	$0.5271933\ 9 + 1683gx$

Egalant ces deux valeurs, on a $x = 0.02164$, et $10''(x) = 0''216$; donc

$N = 250^\circ 33' 3''216$	$I = 16^\circ 32' 30''89$	$\sin I =$	[9.4544129]
$\cot I =$ [0.5272298 4]	$a^\circ - N = 159.16.11.488$	$\cos I =$	[9.9816427 4]

Digitized by Google

—cos (ε°—N).....	9.9709313 9	H =	158° 27′ 19″ 36
cos ζ°.....	9.9976130 8	ψ° =	60. 26. 22. 56
—cos H.....	9.9685444 7	N =	250. 33. 3. 22
		lieu du périhélie	109. 26. 45. 14

Voici donc les nouveaux élémens de l'orbite que nous mettons en comparaison avec ceux qu'a fournis la première solution.

	Première solution.	Seconde solution.
Log π.....	9.9501129	9.9501 3296
Passage au périhélie,	déc. 31.327434	déc. 31.320612
Inclinaison.....	16° 32′ 48″	16° 32′ 30″ 89
Lieu du nœud.....	250. 32. 52. 88	250. 33. 3. 22
Lieu du périhélie...	109. 27. 12. 95	109. 26. 45. 14

D'après ces seconds élémens, nous allons calculer le lieu du 23 novembre.

Époque... Nov. 23.32241
Périhélie.. Déc. 31.320612
t = 37.998202

$\frac{1}{2}\psi$.....	= 26° 50′ 7″ 37	Γ=Pér. — ☋ (N,)		t.....	1.5797630 5
cos $\frac{1}{2}\psi$.....	9.9505144 1	N1= 70° 33′ 3″ 22		$\pi^{-\frac{3}{2}}$....	0.0748005 6
cos°.....	9.9012088 3	K (arg. de lat.)=ψ—Γ		T.....	1.6545636 1
π.....	9.9501329 6			T....=	45.140214
r.....	0.0491041 3			ψ....=	53° 40′ 14″ 74
sin I.....	9.4544129	cos I....	9.9816427 4	r....=	38.53.41.92
sin K.....	9.4066033 3	tang K..	9.4212077 8	K....=	14.46.32.82
sin ζ.....	8.8610162 3	tang(N1—ε)	9.4028605 2	N1—ε=	14° 11′ 21″ 98
cos ζ.....	9.9988519 9			N1...=	70.33. 3.22
r.....	0.0491041 3	R.....	9.9942071	ε....=	56.21.41.24
SQ.....	0.0479561 2		9.1065630 7	A....=	61. 8.30
cos S.....	9.9984867 2	TI.....	9.1007701 7	S....=	4.46.48.76
SI.....	0.0464428 4	r.....	0.0491041 3	SQ.....	0.0479561 2
R.....	9.9942071	sin ζ....	8.8610162 3	sin S....	8.9208204 8
	0.0522357 4	cos T..	9.9056033 9	QI.....	8.9687766 0
	r.1278094 8		8.8157237 5	TI.....	9.1007701 7
b.....ε =	27° 25′ 4″	TI.....	9.1007701 7	tang T..	9.8680064 3
observ.....	27.25 35	tang b..	9.7149535 8	T....=	36° 25′ 27″ 04
err....	— 31				61. 8.30
				a....=	24.43. 2.96
				observ..	24.41. 4
				err.....	+ 1.58.96

Ainsi dans cette seconde solution l'erreur augmente de 11″ sur la longitude, et diminue de 7″ sur la latitude.

4o. Nous avons déjà fait voir que les élémens de l'orbite peuvent toujours se déduire d'une manière rigoureuse, des deux distances accourcies σ°, σ', supposées connues ; nous avons prouvé de plus qu'on peut ajouter une correction indéterminée aux valeurs de ces deux distances, mais que pour satisfaire aux équations du problème, et particulièrement à l'équation des temps, il faudra que les deux corrections ne dépendent que d'une seule indéterminée. Cela posé, si d'un système déterminé $\sigma^\circ = p$, $\sigma' = q$, qui satisfait à toutes les équations du problème, on déduit les élémens de l'orbite, et que par ces élemens on calcule le lieu de la comète à l'instant de l'observation moyenne, supposons qu'on trouve l'erreur E sur la longitude, et l'erreur e sur la latitude. Si d'un second système $\sigma^\circ = p + \delta p$, $\sigma' = q + \delta q$, on déduit semblablement de nouveaux élémens, lesquels donnent pour la longitude l'erreur $E + \delta E$, et pour la latitude l'erreur $e + \delta e$, on pourra en conclure que pour un système quelconque peu différent de ceux-là, dans lequel on aurait $\sigma^\circ = p + x\delta p$, $\sigma' = q + x\delta q$, les équations du problème seront encore satisfaites, et que les élémens de l'orbite qui en seront déduits, donneront l'erreur $E + x\delta E$ sur la longitude et l'erreur $e + x\delta e$ sur la latitude ; et cette conséquence a lieu pour toute valeur de x positive ou négative, pourvu qu'elle n'excède pas une certaine limite où les valeurs simplement linéaires des corrections cesseraient d'être suffisamment exactes.

On voit par conséquent que par le moyen des deux orbites que nous avons déterminées, on peut en trouver une infinité d'autres peu différentes de celles-là, dans lesquelles les erreurs sur la longitude et la latitude du lieu moyen, seront représentées par $E + x\delta E$ et $e + x\delta e$. Il s'agira ensuite de choisir x, de manière que ces deux erreurs soient atténuées autant qu'il est possible, pour obtenir la solution la plus exacte du problème proposé.

Digitized by Google

Nous avons trouvé dans la première solution $E=108'',24$, $e=-38'',16$, et dans la seconde $E+\delta E=118'',96$, $e+\delta e=-31''$, de là résulte un troisième système dans lequel l'erreur sur le lieu moyen sera

$$\text{en longitude} = 108'',24+x(10'',72),$$
$$\text{et en latitude} = -38'',16+x(7'',16).$$

S'il y avait une valeur de x, peu éloignée des limites $x=0$, $x=1$, qui rendit nulles ces deux erreurs, on aurait par les élémens correspondans, une parabole qui satisferait exactement aux trois observations données; mais on voit immédiatement que cette condition est impossible à remplir, car on ne peut diminuer une des erreurs sans augmenter l'autre.

Suivant la méthode des moindres carrés on aurait à très peu près $x=-1\frac{1}{4}$, ce qui donne l'erreur $1'29'',5$ sur la longitude, et $-50'',7$ sur la latitude. C'est le résultat qu'il paraît convenable d'adopter.

41. Quelle que soit au reste la valeur que l'on prend pour x, pourvu qu'elle soit peu éloignée des limites $x=0$, $x=1$, les élémens de l'orbite correspondante se trouveront très facilement par le moyen du tableau précédent, qui offre le résultat des deux solutions. En effet, si un élément a pour valeur A dans le premier système, et $A+\delta A$ dans le second, sa valeur correspondante à une valeur donnée de x sera $A+x\delta A$. Ainsi, en faisant $x=-1\frac{3}{4}$ conformément à la détermination précédente, on aura les élémens suivans de l'orbite.

Log Π.		9.9500778
Passage au périhélie..	déc.	31.33937
Inclinaison.....		16° 33′ 18″
Lieu du nœud.....		250.32.55
Lieu du périhélie....		109.28. 2

Si l'on calcule d'après ces élémens les lieux de la comète pour les époques des trois observations données, on trouvera les diffé-

Digitized by Google

rences suivantes qui portent le signe + lorsque le résultat du calcul surpasse celui de l'observation, et le signe — dans le cas contraire.

	1re Observ.	2e Observat.	3e Observat.
Longitude.....	— 1″4	+ 1′ 35″6	— 0″8
Latitude.....	0	— 51.7	+ 2.3

Suivant la théorie précédente, les erreurs devraient être nulles, pour la première et la troisième observation, et relativement à la seconde, elles devraient être 1′29″,5 et —50″,7; si ces conditions ne sont pas exactement remplies, c'est que la valeur supposée $x = -1\frac{3}{4}$ est assez éloignée des limites $x = 0, x = 1$, pour que les termes du second ordre qu'on a négligés, produisent quelques secondes d'erreur dans les résultats.

Remarque.

On peut supposer que les trois observations qui servent à déterminer l'orbite ont été corrigées de l'aberration et de la nutation; mais pour obtenir la solution la plus exacte qu'il est possible, il faut encore qu'elles soient corrigées de la parallaxe, ce qui ne peut se faire que lorsque les distances de la comète à la terre sont à peu près connues, c'est-à-dire, lorsqu'on est parvenu par la méthode précédente au second degré d'approximation, ou au moins au premier. Ainsi avant de procéder aux derniers calculs d'approximation, il faudra, au moyen des résultats précédens, corriger les observations données des effets de la parallaxe, et rectifier en conséquence les coefficiens des équations à résoudre, ce qui sera un assez grand surcroît de travail.

On pourra cependant négliger cette correction, lorsque la distance de la comète à la terre sera assez grande pour que sa parallaxe horizontale ne s'élève pas à 1′, et dans tous les cas aussi où l'orbite déterminée par notre méthode ne sera consi-

dérée que comme une première approximation pour parvenir à l'orbite qui satisfait aussi exactement qu'il est possible à l'ensemble des observations.

TROISIÈME MÉTHODE.

42. Il nous reste maintenant à discuter une troisième méthode dans laquelle on suppose connues la longitude a et la latitude b de la comète, observées à un instant déterminé, avec leurs coefficiens différentiels du premier et du second degré, pris par rapport au temps, savoir $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dda}{dt^2}, \frac{ddb}{dt^2}$. La question consiste donc à déterminer les élémens de l'orbite réelle par le moyen d'une portion infiniment petite de l'orbite apparente, supposée parfaitement connue. Ce problème peut se résoudre d'une manière rigoureuse et fort simple par les formules de notre première méthode, dans lesquelles on supposera θ et θ' infiniment petits; on pourra même sans inconvénient faire $\theta' = \theta$.

Dans cette hypothèse on aura d'abord $f' = f + F'\theta - F''\theta^2$, $g' = g + G'\theta - G''\theta^2$, et puisque $f = \text{tang } a$, $g = \frac{\text{tang } b}{\cos a}$, on en déduira immédiatement :

$$F' = \frac{df}{dt} = \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{da}{dt},$$

$$F'' = -\frac{1}{2\cos^2 a} \cdot \frac{dda}{dt^2} - \frac{\sin a}{2\cos^3 a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2,$$

$$G' = \frac{dg}{dt} = \frac{\sin a \text{tang} b}{\cos^2 a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{1}{\cos^2 b \cos a} \cdot \frac{db}{dt},$$

$$G'' = -\frac{1}{2\cos a \cos^2 b} \cdot \frac{ddb}{dt^2} - \frac{\sin a}{\cos^2 a \cos^2 b} \cdot \frac{dadb}{dt^2} - \frac{\sin b}{\cos a \cos^2 b}\left(\frac{db}{dt}\right)^2$$
$$- \frac{\sin a \text{tang} b}{2\cos^2 a} \cdot \frac{dda}{dt^2} - \frac{\text{tang} b(1+\sin^2 a)}{2\cos^3 a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2.$$

D'ailleurs on a aussi $F = f$, $G = g$; et comme il faut supposer

dans nos formules $a=o$, il en résulte

$$F=o,\ F'=\frac{da}{dt},\ F''=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dda}{dt^2},$$
$$G=\operatorname{tang} b,\ G'=\frac{1}{\cos^2 b}\cdot\frac{db}{dt},$$
$$G''=-\frac{1}{2\cos^2 b}\cdot\frac{ddb}{dt^2}-\frac{\sin b}{\cos^3 b}\left(\frac{db}{dt}\right)^2-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} b\left(\frac{da}{dt}\right)^2.$$

Cela posé on aura d'abord les deux équations

$$F''\mu-F'\mu'=\tfrac{1}{2}\omega(N-FM),$$
$$G''\mu-G'\mu'=\tfrac{1}{2}\omega(-GM);$$

dans lesquelles, si on fait $\mu'=k'\mu$, $\omega=h\mu$, on aura

$$k'=\frac{F''GM+G''(N-FM)}{F'GM+G'(N-FM)},\quad h=\frac{2F''G'-2F'G''}{F'GM+G'(N-FM)},$$

ou en faisant les substitutions et mettant les valeurs $M=R\cos A$, $N=R\sin A$,

$$k'=-\frac{-\frac{1}{2}\sin b\cos b\cos A\cdot\frac{dda}{dt^2}-\frac{1}{2}\sin A\left[\frac{ddb}{dt^2}+\sin b\cos b\left(\frac{da}{dt}\right)^2+2\operatorname{tang} b\left(\frac{db}{dt}\right)^2\right]}{\sin b\cos b\cos A\cdot\frac{da}{dt}+\sin A\cdot\frac{db}{dt}}.$$

43. Ces valeurs supposent $a=o$: on les rendra indépendantes de cette supposition en mettant $A-a$ ou A_1 à la place de A.

Soit donc $A-a=A_1$, et pour abréger

$$P=\frac{dadb-dbda}{dt^3}+2\operatorname{tang} b\cdot\frac{dadb^2}{dt^3}+\sin b\cos b\,\frac{da^3}{dt^3},$$
$$Q=\sin b\cos b\cos A_1\cdot\frac{da}{dt}+\sin A_1\cdot\frac{db}{dt},$$

on aura

$$(1)\qquad h=\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{R},\ k'=\frac{-Q\frac{dda}{dt^2}-P\sin A_1}{2Q\frac{da}{dt}}.$$

Ces coefficiens donnent les valeurs de μ' et ω exprimées par le moyen de μ, savoir $\mu' = k'\mu$, $\omega = h\mu$; il faudra ensuite déterminer μ et r par les équations suivantes, conformes à celles de l'art. 42 :

$$r^2 = R^2 + \mu . 2R \cos A1 + \mu^2 . \frac{1}{\cos^2 b},$$

$$h\mu = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3},$$

$$m' = M' + k'\mu, \quad \begin{cases} M' = -\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2}{R}\right) \sin A1 - \epsilon \sin \Psi \cos A1, \\ N' = \frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2}{R} \cos A1 - \epsilon \sin \Psi \sin A1, \end{cases}$$

$$n' = N' + F'\mu,$$

$$p' = (Gk' + G')\mu,$$

$$m'^2 + n'^2 + p'^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}.$$

Substituant les valeurs de m', n', p', dans la dernière équation, on aura le résultat suivant

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{2}{R} - 1 + 2B\mu + C\mu^2,$$

où l'on a fait

$$B = M'k' + N'F',$$
$$C = k'^2 + F'^2 + (Gk' + G')^2; \qquad (2)$$

le problème est donc réduit à la résolution des trois équations

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} + h\mu,$$
$$r^2 = R^2 + \mu . 2R \cos A1 + \frac{\mu^2}{\cos^2 b}, \qquad (3)$$
$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{2}{R} - 1 + 2B\mu + C\mu^2.$$

44. Si l'on ne fait aucune hypothèse sur la nature de l'orbite, il faudra déterminer r et μ par les deux premières équations, et substituer les valeurs trouvées dans la troisième, ce qui fera con-

Digitized by Google

naître la valeur de $\frac{1}{a}$, par laquelle on jugera si l'orbite est elliptique ou hyperbolique selon que a sera positif ou négatif.

Si l'on suppose d'avance que l'orbite est parabolique, ce qui donne $\frac{1}{a} = 0$, on aura une équation de plus que d'inconnues. Dès-lors il est possible de combiner ces équations de manière à obtenir la solution la plus simple, et toutes les combinaisons seront également bonnes, si les coefficiens différentiels qui font partie des données, ont toute l'exactitude nécessaire.

Une combinaison qui se présente naturellement et qui semble cependant n'avoir point encore été aperçue, réduit immédiatement le problème à la résolution de l'équation du troisième degré :

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{R^3} + h\mu\right)\left(R^2 + 2\mu R\cos A1 + \frac{\mu^2}{\cos^2 b}\right) = \frac{1}{R} - \frac{1}{2} + B\mu + \frac{1}{2}C\mu^2.$$

Ainsi dans cette méthode l'orbite peut être déterminée sans aucun tâtonnement, ce qui est un avantage que n'ont point les autres méthodes ou qu'elles n'auraient que par des éliminations très laborieuses, et qui compliqueraient extrêmement les calculs.

Lorsque l'équation précédente sera satisfaite et qu'on connaîtra par conséquent une valeur suffisamment approchée de μ, on la substituera dans deux des équations (3), afin d'en tirer deux valeurs de r; si ces deux valeurs s'accordent entre elles, on en conclura que la troisième est satisfaite aussi, et que le problème est résolu.

Si ces deux valeurs de r ne s'accordent pas, on en conclura que l'hypothèse parabolique n'a pas lieu et que la quantité $\frac{1}{a}$ qui entre dans la troisième des équations (3), ne peut être négligée. Dans ce cas il faudra, comme nous l'avons déjà dit, résoudre les deux premières équations par les fausses positions, ce qui sera toujours

Digitized by Google

très facile, vu le peu de complication de ces équations; on connaîtra ensuite par la troisième la valeur de $\frac{1}{a}$ qui indiquera une orbite elliptique ou hyperbolique, selon qu'elle sera positive ou négative.

Le cas de l'orbite elliptique peut se rencontrer dans quelques comètes et surtout dans de nouvelles planètes, qui, n'ayant pas encore été observées, seraient prises d'abord pour des comètes. La méthode s'appliquerait d'autant mieux à ce dernier cas, que le mouvement des planètes supérieures est en général beaucoup plus régulier que celui des comètes, et qu'ainsi les coefficiens différentiels pourraient être déduits des observations avec une précision suffisante.

45. Examinons maintenant les différens cas qui donnent lieu à des remarques particulières.

1°. Si la quantité h est négative, on ne pourra satisfaire aux deux équations

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} - \mu(-h),$$
$$r^2 = R^2 + \mu(2R\cos A_1) + \frac{\mu^2}{\cos^2 b},$$

que lorsqu'on aura $(-h) < \frac{3\cos A_1}{R^4}$. En effet, si l'on considère les courbes décrites d'après ces équations, avec des coordonnées μ et r dont les directions soient les mêmes dans les deux courbes, il ne pourra y avoir d'intersection entre elles, qu'autant que la tangente $\frac{dr}{d\mu}$ au point commun, où l'on a $\mu = 0$ et $r = R$, sera plus petite dans la première que dans la seconde, ce qui donne $(-h)\frac{R^4}{3} < \cos A_1$, ou $(-h) < \frac{3\cos A_1}{R^4}$.

Si cette condition n'est pas remplie, la première des équations (3) devra être rejetée, à cause de l'inexactitude du coeffi-

cient h, et on ne pourra avoir qu'une solution médiocrement approchée par les deux autres où il faudra supposer $\frac{1}{a}=0$.

2°. Si la quantité h est positive, l'équation (4) aura toujours une racine positive, parce que le premier et le dernier terme de cette équation seront de signes contraires. Dans ce cas on aura nécessairement $r<R$, et par conséquent il faudra que $2R\cos A_1$ soit négatif et plus grand que $\frac{\mu}{\cos^2 b}$, de sorte qu'on aura..... $\mu<2R\cos^2 b\cos(180°+A_1)$.

3°. Si $h=0$, on aura $r=R$ et $\mu=2R\cos^2 b\cos(180°+A_1)$. Dans ce même cas il faudra qu'on ait aussi $1=2B\mu+C\mu^2$.

4°. Si h, sans être absolument nul, est très petit, on aura à très peu près $r=R$ et $\mu=2R\cos^2 b\cos(180°+A_1)$, ce qui facilitera beaucoup la résolution des équations du problème.

5°. Si l'on a $Q=0$, ou $\sin b\cos b\cos A_1 . \frac{da}{dt}+\sin A_1 . \frac{db}{dt}=0$, il faudra qu'on ait en même temps $P=0$, sans quoi μ serait infini. Ce cas est celui où le lieu du soleil serait situé dans le même grand cercle que l'orbite apparente. Le lieu du soleil devient donc le nœud de l'orbite apparente à l'instant où la longitude de la comète est a, et sa latitude b : appelant i l'inclinaison de cette orbite, on aura

$$\text{tang } b=\text{tang } i\sin(a-A).$$

Différenciant cette équation en faisant varier seulement a et b, on en tire

$$\frac{db}{dt}=\sin b\cos b\cot(a-A).\frac{da}{dt}, \quad \text{ou} \quad Q=0;$$

différenciant ultérieurement cette équation, pour achever de déterminer le plan de l'orbite apparente, on aura $P=0$, comme cela est nécessaire pour que l'équation $Rh=\frac{P}{Q}$ puisse subsister. Mais elle devient indéterminée et ne donne point la valeur de h.

46. Dans ce cas par conséquent les deux équations entre μ', μ et ω, se réduisent à une seule, savoir $F''\mu - F'\mu' = \frac{1}{2}N\omega$, ou

$$\mu' = \frac{-\frac{1}{2}\omega . R \sin A1 - \frac{1}{2}\mu . \frac{dda}{dt^2}}{\frac{da}{dt}}.$$

Désignons cette valeur par $\mu' = K\mu + L\omega$; alors le problème ne pourra plus être résolu que dans l'hypothèse parabolique, et les équations réduites au nombre strictement nécessaire, seront

$$r^2 = R^2 + \mu(2R \cos A1) + \frac{\mu^2}{\cos^2 b},$$

$$\omega = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}, \quad K = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{dda}{dt^2}}{\frac{da}{dt}}, \quad L = \frac{-\frac{1}{2} R \sin A1}{\frac{da}{dt}},$$

$$\mu' = K\mu + L\omega,$$
$$m' = M' + \mu',$$
$$n' = N' + F'\mu,$$
$$p' = G\mu' + G'\mu,$$
$$m'^2 + n'^2 + p'^2 = \frac{a}{r}.$$

On voit qu'en donnant une valeur à μ, on connaîtra successivement r, ω, μ', m', n', p', et par ces trois dernières on aura une seconde valeur de r qui devra s'accorder avec la première.

La solution est toujours possible, mais elle est plus difficile à obtenir dans ce cas particulier que dans le cas général ; une semblable difficulté se fera sentir, ou même deviendra plus grande si les quantités P et Q, sans être tout-à-fait nulles, sont très petites.

Au reste dans tous les cas, dès qu'on aura satisfait aux équations du problème, il sera très facile d'avoir les élémens de l'orbite au moyen des quantités m, n, p, m', n', p', ainsi que nous l'avons fait voir dans tous les exemples de notre première méthode.

Digitized by Google

47. Telles sont les formules que l'on devra suivre dans la pratique de cette troisième méthode; elle ne laissera rien à désirer, toutes les fois qu'on pourra déduire avec sûreté des données de l'observation, les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dda}{dt^2}$, $\frac{ddb}{dt^2}$. Voici au reste comment on pourra déterminer ces coefficiens d'après un certain nombre d'observations qui ne devra jamais être moindre que trois.

Soit a la longitude de la comète pour une époque déterminée j, qui sera celle de l'observation à peu près moyenne entre toutes les autres; on pourra supposer pour le temps $j+t$ peu différent de j, la longitude représentée par la formule

$$a + a't + \frac{t}{2} a''t' + \frac{1}{2.3} a'''t^3 + \text{etc.}$$

Appliquant cette formule à la longitude particulière $a+\delta a$ qui répond au temps $j+\theta$, on aura l'équation de condition

$$\frac{\delta a}{\theta} = a' + \frac{1}{2} a''\theta + \frac{1}{2.3} a'''\theta^2 + \text{etc.}$$

Dans cette équation le temps θ, exprimé en jours moyens, devra être multiplié par le nombre dont le logarithme est 8.2353821, et il faudra réduire en même temps l'arc δa en parties du rayon pris pour unité.

Autant on voudra combiner d'observations, autant on aura d'équations semblables à la précédente, par lesquelles on déterminera un pareil nombre de coefficiens a', a'', a''', etc.

La même opération servira à déterminer les coefficiens différentiels de la latitude (*).

(*) Il serait facile d'éviter la résolution de ces équations, car l'expression générale de la longitude pour un temps quelconque t, se déduit aisément des longitudes a, $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, etc., qui répondent à des temps déter-

48. Par exemple si, parmi les six observations dont nous avons donné le tableau, pag. 45 du 1er suppl., on choisit les quatre des 16, 18, 23 et 30 novembre, celle du 23 étant prise pour époque, on aura les résultats suivans

$$a = 24^\circ\,41'\,4'', \qquad b = 27^\circ\,25'\,35'',$$
$$\frac{da}{dt} = -[9.948269], \qquad \frac{db}{dt} = -[9.805570],$$
$$\frac{dda}{dt^2} = -[0.673334], \qquad \frac{ddb}{dt^2} = -[0.782466].$$

A ces données il faut joindre celles qui sont relatives au lieu du soleil, savoir :

$$R = [9.9942071], \quad \downarrow = 180^\circ + A - 99^\circ 35' = 141^\circ 33' 30'',$$
$$A = 61^\circ\,8'\,30'', \quad M' = -[9.7856947],$$
$$A1 = A - a = 36.27.26, \quad N' = [9.9078521];$$

il en résultera les valeurs logarithmiques suivantes :

$$Q = -[9.8271570], \quad B = [0.1527402],$$
$$P = [0.2316645], \quad C = [1.3006704],$$
$$h = -[0.4103004],$$
$$k' = -[0.5446023].$$

Cela posé, nous aurons à résoudre les trois équations

$$\frac{1}{r^3} = [0.0173787] - \mu\,[0.4103004],$$
$$r^\circ = [9.9884142] + \mu\,[0.2006555] + \mu^\circ\,[0.1035621],$$
$$\frac{1}{r} = [9.7104785] + \mu\,[0.1527402] + \mu^\circ\,[0.9996404];$$

---

minés o, 0′, 0″, 0‴, etc.; cette longitude pour le temps t est en général de la forme $a + (a1 - a)P + (a2 - a)Q + (a3 - a)R + \text{etc.}$, P, Q, R étant des fonctions de t, 0′, 0″, 0‴, etc., toujours connues *à priori*. Mais ces expressions donnent lieu à des calculs plus compliqués que ceux que nous indiquons.

On ne peut, dans ce cas, faire aucun usage de la première équation, ni par conséquent de l'équation (4), parce que $(-k)$, dont la valeur est [0.4103004], excède la limite..... $\frac{3\cos A\,1}{R^4} = [0.4057113]$. Ainsi ce n'est que la combinaison des deux dernières équations qui peut conduire à une solution approchée. On en tire

$$\mu = [9.1441070], \qquad r = [0.0430940];$$

calculant ensuite les quantités m, n, p, etc., d'après les formules

$$\begin{aligned} m &= M + \mu, & m' &= M' + k'\mu, \\ n &= N + f\mu = N, & n' &= N' + F'\mu, \\ p &= g\mu = \mu \operatorname{tang} b, & p' &= (Gk' + G')\mu, \end{aligned}$$

on trouve les valeurs logarithmiques suivantes :

$m = [9.9698793]$, $(-m') = [0.0409350]$, $(mn' - m'n) = +[0.1083884]$,
$n = [9.7681562]$, $n' = [9.8357395]$, $(mp' - m'p) = -[9.4190230]$,
$p = [8.8592201]$, $(-p') = [9.5640159]$, $(np' - n'p) = -[9.4222755]$,

d'où résultent les élémens de l'orbite comme il suit :

$\log \Pi = 9.9508759.$
Passage au périh... déc. 29.72972.
Inclinaison... 16° 11′ 8″6
Lieu du Ω... 249.53.56,4
Lieu du périh... 108.11.14,7.

On voit que ces élémens diffèrent considérablement des élémens connus, et qu'ils ne peuvent être considérés que comme une première approximation assez grossière; c'est ce qu'on pouvait prévoir par l'inexactitude du coefficient h, qui a rendu fautive la première des équations (3).

49. Pour qu'on puisse mieux juger du peu de précision avec laquelle les coefficiens différentiels de la longitude et de la latitude peuvent être déterminés par la méthode ordinaire d'inter-

polation, nous allons chercher, d'après les élémens corrigés de la page 48, 1re Suppl., le lieu de la comète pour l'époque de novembre, 23.32241 + θ, θ étant un temps très petit dont nous négligeons seulement les puissances supérieures à la seconde, afin que du résultat contenant l'expression générale de la longitude et de la latitude, on puisse déduire les coefficiens différentiels cherchés du premier et du second ordre.

Époque donnée... novembre 23.32241 + θ
Passage au périhélie... décembre 31.28551
différence..... $t = 37.96310 - \theta$;

convertissant ce nombre de jours en arc du moyen mouvement de la Terre, et faisant $j = 37',96310 = 0.6550460$, on aura $t = j - \theta$.

Voici maintenant les diverses parties du calcul que nous devons exécuter.

I. Soit ψ l'anomalie qui répond au temps t, et $u = \text{tang}\frac{1}{2}\psi$; on aura l'équation

$$t = \sqrt{(2\Pi^3)}.(u + \tfrac{1}{3}u^3),$$

d'où résulte $(1 + u^2)\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(2\Pi^3)}}$, ou $\frac{d\psi}{dt} = \frac{2\cos^4\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{(2\Pi)}}$; ensuite, $\frac{dd\psi}{dt^2} = -2\text{tang}\frac{1}{2}\psi.\frac{d^{1/2}}{dt^2}$. Soit ensuite $t = j$; on aura par la table des comètes, $\psi = 53° 36' 54''$, et en même temps,

$$\frac{d\psi}{dt} = -[0.0275952], \qquad \frac{dd\psi}{dt^2} = -[0.0597703].$$

Donc, si on appelle ψ' l'anomalie qui répond au temps $t = j - \theta$, on aura

$$\psi' = \psi - \theta[0.0027595\ 2] - \theta^2[9.7587403].$$

II. L'équation $r = \frac{\Pi}{\cos^4\frac{1}{2}\psi}$ donne $\log r = 0.0490274$; ensuite

on aura par la différentiation,

$$\frac{d\log r}{dt} = m.\frac{d\downarrow}{dt}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\downarrow,$$
$$\frac{dd\log r}{dt^2} = m\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\downarrow.\frac{dd\downarrow}{dt^2} + \frac{m}{2\cos^2\frac{1}{2}\downarrow}.\frac{d\downarrow^2}{dt^2},$$

et en substituant les valeurs trouvées $\frac{dlr}{dt} = [9.3689294]$,.... $\frac{ddlr}{dt^2} = [8.7611853]$.

Donc, si l'on appelle r' le rayon vecteur qui répond au temps $t = j - \theta$, on aura

$$\log r' = 0.0490274 - \theta\,[9.3689294] + \theta^2[8.4601553].$$

III. Connaissant la distance du périhélie au nœud descendant $\Gamma = 38°\ 50'\ 5''$, et l'anomalie $\downarrow = 53°\ 36'\ 54''$, on aura l'argument de latitude

$$\downarrow - \Gamma = 14°\ 46'\ 49''.$$

D'après cette valeur de $\downarrow - \Gamma$ et celle de l'inclinaison $I = 16°\ 31'\ 10''$, on déterminera la latitude héliocentrique ζ et la longitude α, par les équations $\sin\zeta = \sin I \sin(\downarrow - \Gamma)$, $\text{tang}\,(N1 - \alpha) = \cos I\,\text{tang}\,(\downarrow - \Gamma)$; on trouvera ainsi

$$\sin\zeta = [8.8605716], \qquad N1 - \alpha = 14°\ 11'\ 43''3$$
$$\cos\zeta = [9.9988544], \qquad N1 = 70.33.34$$
$$\alpha = 56.21.50,7$$
$$A = 61.\ 8.30$$
$$A - \alpha = S = 4.46.39,3.$$

De l'équation $\sin\zeta = \sin I \sin(\downarrow - \Gamma)$, on déduit

$$\frac{dl\sin\zeta}{dt} = m\cot(\downarrow - \Gamma).\frac{d\downarrow}{dt} = [0.2440336],$$
$$\frac{ddl\sin\zeta}{dt^2} = m\cot(\downarrow - \Gamma).\frac{dd\downarrow}{dt^2} - \frac{m}{\sin^2(\downarrow - \Gamma)}.\frac{d\downarrow^2}{dt^2} = -[0.9761717].$$

Digitized by Google

Donc, si $\mathfrak{C}'$ est la valeur de $\mathfrak{C}$ qui répond au temps $t=j-\theta$, on aura

$$L\sin\mathfrak{C}' = 8.8605716 - \theta[0.2440336] - \theta^2[0.6751417],$$

d'où résulte

$$L\cos\mathfrak{C}' = 9.9988544 + \theta[7.9674680] - \theta^2[8.1015573].$$

Ajoutant la valeur connue de $\log r'$, on aura

$$L(r'\sin\mathfrak{C}') = 8.9095990 - \theta[0.2983862] - \theta^2[0.6724864],$$
$$L(r'\cos\mathfrak{C}') = 0.0478818 - \theta[7.3513467] + \theta^2[8.2097478].$$

IV. De l'équation $\tang(N_1 - \alpha) = \cos I \tang(\downarrow - \Gamma)$ on déduit

$$\frac{d\alpha}{dt}\sin(2\downarrow - 2\Gamma) = -\frac{d\downarrow}{dt}\sin(2N - 2\alpha),$$
$$\frac{dd\alpha}{dt^2}\sin(2\downarrow - 2\Gamma) = -\frac{dd\downarrow}{dt^2}\sin(2N - 2\alpha) + \frac{2d\alpha d\downarrow}{dt^2}[\cos(2N - 2\alpha) - \cos(2\downarrow - 2\Gamma)],$$

ce qui donne

$$\frac{d\alpha}{dt} = -[0.0115800], \qquad \frac{dd\alpha}{dt^2} = [0.0261724].$$

Donc, en appelant α' la longitude pour le temps $t=j-\theta$, on aura

$$\alpha' = 56^\circ\,21'\,50'',7 + \theta[0.0115800] + \theta^2[9.7251424];$$

on a semblablement pour le lieu correspondant de la Terre, vu du Soleil,

$$A' = A - \theta.\frac{dA}{dt} + \tfrac{1}{2}\theta^2.\frac{ddA}{dt^2};$$

or, par les formules de la page 10 du premier Mémoire, on trouve

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\iota^2)}}{R^2}, \quad \tfrac{1}{2}.\frac{ddA}{dt^2} = -\frac{\sqrt{(1-\iota^2)}}{R^3}.\frac{dR}{dt} = \frac{\iota\sin\Psi}{R^3};$$

substituant les valeurs $\epsilon = [8.225051]$, $\Psi = 141^\circ\ 53'\ 30''$, on aura

$$A' = 61^\circ\ 8'\ 30'' + \theta\,[0.0115246] + \theta^2\,[8.0360228],$$
$$\alpha' = 56.21.50,7 + \theta\,[0.0115800] + \theta^2\,[9.7251424],$$
$$A' - \alpha' = S' = 4.46.39,3 - \theta\,[6.1172500] - \theta^2\,[9.7161656];$$

il en résulte

$$\log \sin S' = 8.9205823 - \theta\,[6.8329404] - \theta^2\,[0.4318561],$$
$$\log \cos S' = 9.9984884 + \theta\,[4.6771282] - \theta^2\,[8.2760437].$$

Connaissant déjà, pour le temps $j - \theta$, la valeur de $SQ' = r' \cos \epsilon'$, on en déduira celle $SI' = SQ' \cos S'$ et celle de $Q'I' = SQ' \sin S'$, dont les logarithmes sont

$$\log Q'I' = 8.9684641 - \theta\,[9.3526611] + \theta^2\,[0.4992428],$$
$$\log SI' = 0.0463702 - \theta\,[9.3513375] + \theta^2\,[8.5452820].$$

De ce dernier on déduit, en passant aux nombres,

$$SI' = 1.1126797 - \theta\,[9.7599234] + \theta^2\,[9.3777958].$$

On a encore, par les formules citées, R′ ou

$$ST' = 0.9867500 - \theta\,[8.0187053] + \theta^2\,[7.8295025];$$

donc,

$$T'I' = 0.1259297 - \theta\,[9.7519705] + \theta^2\,[9.5653303],$$
$$\log T'I' = 9.1001282 - \theta\,[0.2896264] - \theta^2\,[0.5526389].$$

Enfin en appelant a' la longitude qui répond au temps $j - \theta$, on a $\text{tang}\,(A' - a') = \frac{Q'I'}{T'I'}$; donc

$$L\,\text{tang}\,(A' - a') = 9.8683359 + \theta\,[0.2362651] + \theta^2\,[9.9459181],$$
$$A' - a' = 36^\circ\ 26'\ 42'' + \theta\,[0.2777913] + \theta^2\,[0.3176162],$$
$$A' = 61.\ 8.30 + \theta\,[0.0115246] + \theta^2\,[8.0360228],$$
$$a' = 24.41.48 - \theta\,[9.9389714] - \theta^2\,[0.3153394].$$

Digitized by Google

Cette dernière valeur donne les deux coefficiens différentiels de la longitude, savoir,

$$\frac{da}{dt} = -[9.9389714], \qquad \frac{dda}{dt^2} = -[0.6163694].$$

Pour déterminer la latitude, il faut faire le calcul de la formule $\text{tang}\, b' = \frac{r' \sin C'}{TT'} \cos(A' - a')$; on en déduira

$$L \text{ tang}\, b' = 9.7149577 - \theta\,[9.8113034] - \theta^2\,[0.4781180],$$
$$b' = 27^\circ\, 25'\, 4''8 - \theta\,[9.7849805] - \theta^2\,[0.4096529],$$

et enfin les coefficiens différentiels de la latitude,

$$\frac{db}{dt} = -[9.7849805], \qquad \frac{ddb}{dt^2} = -[0.7106829].$$

On avait trouvé, par l'interpolation de quatre observations les plus proches de l'instant pris pour époque,

$$\frac{da}{dt} = -[9.948269], \qquad \frac{dda}{dt^2} = -[0.673334],$$
$$\frac{db}{dt} = -[9.8055770], \qquad \frac{ddb}{dt^2} = -[0.782466].$$

Ainsi on voit que l'interpolation ne donne pas avec assez de précision les coefficiens différentiels cherchés, surtout ceux du second ordre, ce qui nuit beaucoup au succès de la méthode.

5o. Il n'y a pas de doute qu'avec les coefficiens différentiels que nous venons de trouver, l'application de la méthode ne fasse connaître la véritable orbite d'une manière suffisamment approchée. C'est ce que nous allons vérifier par le calcul suivant.

Il faut d'abord remarquer que les élémens corrigés sur lesquels nous avons établi les calculs précédens, donnent le lieu du 23 novembre un peu différent du lieu observé; en effet, nous avons trouvé par ces élémens la longitude $a = 24^\circ\, 41'\, 48''$, et la latitude $b = 27^\circ\, 25'\, 4''{,}8$, tandis que le lieu observé donne

$a = 24° 41' 4''$, et $b = 27° 25' 35''$, ce qui donne à peu près les mêmes erreurs qu'on a notées dans le tableau de la page 47.

Pour l'application de la méthode, il faudra donc supposer $a = 24° 41' 48''$, $b = 27° 25' 4'',8$; on a d'ailleurs pour le lieu du Soleil les données

$$R = [9.9942071], \qquad A = 61° 8' 30'',$$
$$\Psi = 141° 33' 30'', \qquad A1 = A - a = 36.26.42;$$

substituant ces valeurs, ainsi que celles de $\epsilon = [8.225051]$, dans les formules

$$M = R\cos A1, \quad M' = -\left(\frac{1-\frac{1}{2}\epsilon^2}{R}\right)\sin A1 - \epsilon\sin\Psi\cos A1,$$
$$N = R\sin A1, \quad N' = \left(\frac{1-\frac{1}{2}\epsilon^2}{R}\right)\cos A1 - \epsilon\sin\Psi\sin A1,$$

on en tire

$$M = [9.8996940], \quad M' = -[9.7855718\ 6],$$
$$N = [9.7680307], \quad N' = [9.9079020\ 5].$$

On trouve ensuite les valeurs logarithmiques des quantités qui servent à former les équations du problème, comme il suit :

$$F' = \frac{da}{dt} = -[9.9389714], \qquad h = -[0.5216356],$$
$$G = \text{tang}\, b = [9.7149577], \qquad k' = -[0.4894318],$$
$$G' = \frac{1}{\cos^2 b}\cdot\frac{db}{dt} = -[9.8884767], \qquad Gk + G' = -[0.3755762\ 5],$$
$$P = [0.1272742], \qquad B = [0.0721754],$$
$$Q = -[9.8114315], \qquad C = [1.2018967].$$

Cela posé, nous aurons à résoudre les trois équations

$$\frac{1}{r^3} = [0.0173787] - \mu[0.5216356],$$
$$r^3 = [9.9884142] + \mu[0.2007240] + \mu^2[0.1034962],$$
$$\frac{1}{r} = [9.7104795] + \mu[0.0721754] + \mu^2[0.9008667].$$

Digitized by Google

51. Ces trois équations s'accordent à donner à très peu près les mêmes valeurs de r et de μ. Par les deux dernières, qui doivent être les plus exactes, on trouve

$$\mu = [9.1945922], \quad r = [0.0490209].$$

Pour déduire de cette solution les élémens de l'orbite, on calculera d'abord les valeurs logarithmiques des quantités m, n, p, m', n', p', ce qui donnera les résultats suivans :

m=[9.9778592 5], m'=—[0.0387892 2], $mn'-m'n$= [0.1073469 2],
n=[9.7680307], n'= [9 8279542], $mp'-m'p$=—[9.4222955 7],
p=[8.9095499], p'=—[9.5701684 5], $np'-n'p$=—[9.4353825 3].

Cela posé, la distance périhélie Π se trouve directement par la formule

$$2\Pi = (mn'-m'n)^2 + (mp'-m'p)^2 + (np'-n'p)^2,$$

d'où résulte Π = [9.9502708 4]; l'inclinaison I, déduite de la formule $\cos I = \frac{mn'-m'n}{\sqrt{(2\Pi)}}$, donne $\cos I$ = [9.9816965], et I = 16° 31′ 4″,8. Le lieu du nœnd S est donné par la formule $\text{tang}(S-a) = \frac{np'-n'p}{mp'-m'p}$ = [0.0130869 6], d'où résulte

$$\begin{aligned} S - a &= 45^\circ\,51'\,47''3 \\ a &= 24.41.48 \\ \hline S &= 70^\circ\,33'\,35''3 \\ \text{ou } S &= 250.33.35,3. \end{aligned}$$

La seconde valeur est celle qu'il convient d'adopter, parce que $\cos(S-a)$ doit être de même signe que $np'-m'p$.

De l'équation $\Pi = r\cos^2\frac{1}{2}\psi$, on déduira $\cos\frac{1}{2}\psi$=[9.9506249 7], $\frac{1}{2}\psi = 26^\circ\,48'\,29'',52$, $\psi = 53^\circ\,36'\,47'',04$.

A cette anomalie répond, dans la Table des comètes, le temps T = 45.074958 = [1.6539353], d'où l'on déduit le

temps t employé à décrire l'anomalie ψ ;

$$t = \Pi^{\frac{3}{2}} T = 37.961344$$

Epoque du lieu observé... nov. 23.32241

Passage au périhélie... déc. 31.283754.

Enfin l'équation $\tang \varphi = \frac{n}{m} = [9.7917145]$ donne la longitude héliocentrique $\varphi = 31^\circ\ 40'\ 4'',4$, d'où l'on déduit aisément le lieu du périhélie $= 109^\circ\ 23'\ 34'',1$.

En rassemblant tous ces résultats, on aura les élémens de l'orbite comme il suit :

Log Π.....		9.9502708
Passage au périhélie.....	déc.	31.28375
Inclinaison.....		16° 31′ 4″8
Lieu du nœud asc.....		250.33.35,3
Lieu du périhélie.....		109.23.34,1

On voit que ces élémens s'accordent presque entièrement avec les élémens corrigés de la page 48, 1er suppl., les différences étant très légères et devant être attribuées, soit à la longueur des calculs, soit à l'imperfection des données qui ont servi à déterminer les coefficiens M′ et N′.

Paris, le 10 août 1820.

Digitized by Google

NOTE par M. ***.

Au commencement de la dissertation précédente, page 4, l'auteur parlant de sa *Méthode des moindres carrés*, s'est borné à rappeler qu'il l'avait publiée, pour la première fois, en 1805, à la fin d'un mémoire sur les comètes, qui porte la date du mois de *mars* de cette année. Cependant, comme un géomètre fort célèbre n'a pas hésité à s'approprier cette méthode, dans un ouvrage imprimé en 1809, nous croyons devoir nous arrêter un instant sur cette prétention que tout lecteur impartial pourra qualifier ensuite du nom qu'il jugera convenable. Voici comment elle est énoncée : Après avoir exposé cette méthode ou ce principe comme lui appartenant, ce géomètre ajoute : « *Ceterum principium* nostrum *quo jam inde ab anno* 1795 *usi sumus, nuper* » *etiam à clar.* Legendre *in opere* Nouvelles Méthodes, etc., *prolatum est*, etc. » Si cela n'est pas très décisif, c'est du moins fort clair, et surtout fort commode. Dans ce système, l'histoire des sciences s'écrira beaucoup plus aisément; une découverte pourra bien ne plus appartenir à celui qui l'aura faite; mais qu'importe ! Elle appartiendra toujours à quelqu'un, à celui qui aura trouvé bon de la revendiquer sans titre, à partir de l'époque la plus reculée. De bonne foi, un pareil système est-il admissible ? On ne l'avait pensé jusqu'ici dans aucune circonstance, comme l'Histoire des Mathématiques en fait foi à chaque page; on regardait la propriété d'une découverte comme invariablement assurée à celui qui, le premier, la mettait au jour, et toute prétention contraire à ses droits, pouvant l'exposer lui-même à des soupçons d'une nature injurieuse, exigeait l'appui de titres précis et authentiques. Aussi dirions-nous volontiers que celle dont nous parlons était, en 1809, d'une espèce tout-à-fait nouvelle, si nous ne trouvions qu'en 1801 le même géomètre s'essayait dès-lors, dans ce genre, d'une manière il est vrai bien plus imparfaite. On avait vu paraître dans les *Mém. de l'Ac. des Sc. pour* 1785, un théorème (la loi de réciprocité) dont les conséquences fesaient faire des progrès réels à l'analyse des nombres, sans que l'inventeur, on en convient, l'eût démontré rigoureusement dans tous les cas. Or, comment le géomètre dont nous parlons s'exprimait-il, à ce sujet, seize ans après? Il établissait d'abord ce théorème, par lui nommé *fondamental* à cause de son importance, puis il ajoutait : « *Theorema fundamen-* » *tale quod sane inter elegantissima in hoc genere est referendum, in eâdem* » *formâ in quâ suprà propositum est, a nemine huc usque fuit prolatum.* » On trouve cependant deux pages plus loin : « *Clar.* Legendre *in egregiâ tractatione* Ac. des Sc. 1785, *pervenit ad theorema quod si rem ipsam spectas cum*

« *theoremate fundamentali idem est.* » Voilà un aveu qui ne s'arrange guère avec ce qui précède, et un bien singulier théorème qui, publié en 1785, n'avait pourtant été donné par personne en 1801 ! Mais du moins à cette époque on ne disait pas encore, en se donnant *dix ans d'avance*, comme on a fait depuis en 1809 : « *theorema* nostrum *quo jam inde ab anno* 1775 *usi sumus.* » Quoi qu'il en soit, au surplus, de ce système sur la propriété littéraire, il ne sera peut-être pas inutile de rappeler en finissant, que la fameuse série de Lagrange, pour le retour des suites, quoique non démontrée par son auteur, n'a pas cessé de porter le nom de *Théorème de Lagrange*, et que nul jusqu'ici n'a songé à lui en disputer la propriété.

De l'Imprimerie de HUZARD-COURCIER, rue du Jardinet, n° 12.

609486

Digitized by Google

ERRATA du second Supplément.

Page 3, ligne 8, $\frac{1}{a}$, *lisez* $\frac{1}{a}$

4, 6, $S\gamma$, *lisez* $S\Upsilon$

7, 6, $\lambda k \ldots \frac{r'}{k}$, *lisez* $\lambda c \ldots . \frac{r'}{c}$

13, ligne antépénultième, $\varpi A1$, *lisez* $\varpi \cos A1$

15, ligne 20, deux ans, *lisez* deux cas

17, 5, négative, *lisez* de signe contraire à h

21, 10, $2R\cos(180° + A - a)$, *lisez* $2R\cos^2 b\cos(180° + A - a)$

23, 18, *lisez* $\log\lambda' = \log\left(\frac{\theta'}{\theta+\theta'}\right) + \frac{\theta}{\theta+\theta'}\zeta$

25, 14, $\tang\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2} - N\right)$, *lisez* $\tang\left(\frac{\alpha^\circ+\alpha'}{2} - N\right)$

27, ligne pénultième, θ et θ', *lisez* λ et λ'

36, ligne 9, $\cos\frac{1}{2}\psi = 9.98\ldots$, *lisez* $\cos\frac{1}{2}\psi = 9.89\ldots$

63, *La troisième des équations* (3) *doit être lue ainsi :*

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{2}{R} - 1 + 2B\mu + C\mu^2$$

66, 3, à la place de la première phrase, *lisez*,
2°. si la quantité h est positive, il faudra, conformément à l'art. 12, que la quantité $\cos A1 + \frac{1}{3}hR^3$ soit négative. Dans ce cas, etc.

68, 12, *lisez* $a + a't + \frac{1}{2}a''t^2 + \frac{1}{2.3}a'''t^3 +$ etc.

Digitized by Google

BIBLIOTECA